

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé 2A n°2 CORRIGE (2 Heures)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : 10 points + 2 points bonus

1 °)

a) $H(z) = H_d(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ donc les pôles de la fonction de transfert sont 0 et 1. Le module de 1 n'est pas strictement plus petit que 1, donc le système est instable.

b) La réponse impulsionnelle $h(n)$ est l'original de $H(z) = \frac{1}{z(z-1)}$. En écrivant $H(z) = \frac{1}{z^2} \frac{z}{z-1}$, et en utilisant la formule du retard, on trouve que $h(n) = U(n-2)$. C'est un système RII, car la suite $h(n)$ comporte une infinité de termes non nuls. On peut répondre aussi que le système est RII car il est instable.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(n) = 1 \neq 0$ donc, par définition, le système est instable.

2 °) a)

$$H(z) = \frac{\frac{1}{z(z-1)}}{1 + \frac{k}{z(z-1)}} = \frac{\frac{1}{z(z-1)}}{\frac{z(z-1)+k}{z(z-1)}} = \frac{1}{z(z-1)} \frac{z(z-1)}{z(z-1)+k} = \frac{1}{z(z-1)+k} = \frac{1}{z^2 - z + k}$$

b)

L'expression $H(z) = \frac{\frac{1}{z^2}}{1 - \frac{1}{z} + \frac{k}{z^2}}$ s'obtient en partant de celle obtenue dans la question précédente et en divisant numérateur et dénominateur par z^2 .

On sait que $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1}{z^2}}{1 - \frac{1}{z} + \frac{k}{z^2}}$ d'où l'on tire :

$$Y(z) \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{k}{z^2} \right) = X(z) \frac{1}{z^2}.$$

Par utilisation du théorème du retard, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, y(n) - y(n-1)U(n-1) + ky(n-2)U(n-2) = x(n-2)U(n-2).$$

3 °)
a)

Il s'agit de résoudre l'équation $z^2 - z + k = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 1 - 4k < 0$ car $k > \frac{1}{4}$ par hypothèse. Donc on a deux pôles complexes non réels :

$$\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{4k-1}}{2} = \frac{1}{2} \pm j \sqrt{\frac{4k-1}{4}} = \frac{1}{2} \pm j \sqrt{k - \frac{1}{4}}.$$

b)

Le système est stable si et seulement si $\left| \frac{1}{2} \pm j \sqrt{k - \frac{1}{4}} \right| < 1$, ce qui est équivalent à

$$1 > \left| \frac{1}{2} - j \sqrt{k - \frac{1}{4}} \right|^2 = \frac{1}{4} + k - \frac{1}{4} = k.$$

On en déduit que le système est stable si et seulement si $k \in]\frac{1}{4}; 1[$.

4 °)
a)

On a dans ce cas $H(z) = \frac{1}{z^2 - z + \frac{1}{4}} = \frac{1}{(z - \frac{1}{2})^2}$. L'unique pôle $z = \frac{1}{2}$ a son module plus petit que 1, donc le système est stable.

b)

(i)

On a ici $X(z) = \frac{z}{z-1}$ donc $Y_{ind}(z) = H(z)X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-\frac{1}{2})^2}$

(ii) Puisque la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{ind}(n)$ est supposée exister et être finie, on peut appliquer le théorème de la valeur finale qui dit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{ind}(n) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right) Y_{ind}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{z}{(z-1)(z-\frac{1}{2})^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})^2} = 4.$$

5 °)

a) On a les équivalences suivantes :

$$0 < k < \frac{1}{4}$$

$$0 > -k > \frac{-1}{4}$$

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{4} - k > 0$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}} > \sqrt{\frac{1}{4} - k} > 0.$$

b)

$$\frac{1}{2} > \sqrt{\frac{1}{4} - k} \text{ donc } z_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - k} > 0.$$

$$z_2 - z_1 = 2\sqrt{\frac{1}{4} - k} > 0 \text{ donc } z_2 > z_1.$$

$$z_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - k} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

On en déduit que $0 < z_1 < z_2 < 1$.

c) La triple inégalité précédente prouve que les modules de z_1 et z_2 ont un module strictement inférieur à 1 donc le système est stable.

Au final, dans cet exercice, on obtient que le système est stable si et seulement si $0 < k < 1$.

Exercice 2 : 10 points + 2 points bonus

1 °)

$$x_2 = \frac{5}{6}x_1 - \frac{1}{6}x_0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1.$$

$$x_3 = \frac{5}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_1 + 1 = \frac{5}{6} + 1 = \frac{11}{6}.$$

$$x_4 = \frac{5}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_2 + 1 = \frac{5}{6} \cdot \frac{11}{6} - \frac{1}{6} + 1 = \frac{85}{36}.$$

2 °)
a)

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$AU_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6}x_{n+1} - \frac{1}{6}x_n + 1 \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

3 °) a)

$$P_A(X) = \det \begin{pmatrix} \frac{5}{6} - X & -\frac{1}{6} \\ 1 & -X \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{6} - X\right)(-X) + \frac{1}{6} = X^2 - \frac{5}{6}X + \frac{1}{6}.$$

b) On calcule les valeurs propres de A en résolvant l'équation $P_A(X) = 0$. On trouve $\text{Sp}(A) = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{3} \right\}$. Le spectre de A étant composé de deux valeurs distinctes et réelles, il existe une matrice inversible $P \in M_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Sachant que la matrice diagonale D doit contenir les valeurs propres de A , on en déduit que l'on

peut prendre $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

c)

Les colonnes de P doivent être des vecteurs propres de A pour les valeurs propres $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ respectivement. On vérifie par un simple calcul que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4 °) a)

$$\begin{aligned} X = AX + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6}a - \frac{1}{6}b + 1 \\ a \end{pmatrix} \\ &\iff a = b \text{ et } a = \frac{5}{6}a - \frac{1}{6}b + 1 \iff a = b = 3. \end{aligned}$$

On en déduit que $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

b)

On a d'une part $U_{n+1} = AU_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a d'autre part $X = AX + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

En soustrayant ces deux égalités, on obtient : $U_{n+1} - X = AU_n - AX = A(U_n - X)$

5 °)

a)

Le résultat de la question précédente se réécrit $V_{n+1} = AV_n$. La suite $(V_n)_n$ est donc "géométrique" de "raison" A , donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n V_0$ par analogie aux suites géométriques.

D'une part, $V_0 = U_0 - X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

D'autre part,

$$A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1}) = PD^n P^{-1},$$

d'où :

$$V_n = PD^n P^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

b)

On calcule d'abord par la formule du cours sur l'inverse d'une matrice 2×2 :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} V_n = PD^n P^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-6}{2^n} \\ \frac{3}{3^n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-6}{2^n} + \frac{3}{3^n} \\ \frac{-6}{2^{n-1}} + \frac{3}{3^{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2^{n-1}} + \frac{1}{3^{n-1}} \\ \frac{-3}{2^{n-2}} + \frac{1}{3^{n-2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarquant que $V_n = \begin{pmatrix} x_{n+1} - 3 \\ x_n - 3 \end{pmatrix}$, on déduit par identification que $x_n - 3 = \frac{-3}{2^{n-2}} + \frac{1}{3^{n-2}}$ d'où :

$$x_n = 3 - \frac{3}{2^{n-2}} + \frac{1}{3^{n-2}} \quad \text{et} \quad \lim x_n = 3.$$

6 °) BONUS. On part de la relation : $x_{n+2} = \frac{5}{6}x_{n+1} - \frac{1}{6}x_n + 1$.
En utilisant les formules :

$$\text{TZ}(x_{n+2}U(n)) = z^2X(z) - x_0z^2 - x_1z \quad \text{et} \quad \text{TZ}(x_{n+1}U(n)) = zX(z) - x_0z,$$

on en déduit, en utilisant les conditions initiales $x_0 = x_1 = 0$:

$$z^2X(z) = \frac{5}{6}zX(z) - \frac{1}{6}X(z) + \frac{z}{z-1},$$

d'où l'on tire :

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6})} = \frac{z}{(z-1)(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{3})}.$$

Une décomposition en éléments simples de $\frac{X(z)}{z}$ donne :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{3}{z-1} - \frac{12}{z-\frac{1}{2}} + \frac{9}{z-\frac{1}{3}},$$

d'où

$$X(z) = \frac{3z}{z-1} - \frac{12z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{9z}{z-\frac{1}{3}}.$$

Le formulaire nous donne l'original :

$$x_n = 3U(n) - \frac{12}{2^n}U(n) + \frac{9}{3^n}U(n) = \left(3 - \frac{3}{2^{n-2}} + \frac{1}{3^{n-2}}\right)U(n).$$

On déduit aussi que $\lim x_n = 3$.