

MATHÉMATIQUES. Corrigé du Devoir surveillé 2A N°1 (2 Heures)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : 9 points + 2

1 °)

a) $\frac{1}{j} (\delta(\nu - 5) - \delta(\nu + 5))$.

b)

$$\begin{aligned} H(\nu) &= TF \left(2 \sin(10\pi t) \cdot \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right) = TF(2 \sin(10\pi t)) \star TF \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right) \\ &= \frac{1}{j} (\delta(\nu - 5) - \delta(\nu + 5)) \star \Pi_1(\nu) = \frac{1}{j} (\delta(\nu - 5) \star \Pi_1(\nu) - \delta(\nu + 5) \star \Pi_1(\nu)) \\ &= \frac{1}{j} (\Pi_1(\nu - 5) - \Pi_1(\nu + 5)), \end{aligned}$$

où on a utilisé la formule $\delta(\nu - a) \star x(\nu) = x(\nu - a)$.

2 °)

On calcule $|H(\nu)| = \left| \frac{1}{j} (\Pi_1(\nu - 5) - \Pi_1(\nu + 5)) \right| = |\Pi_1(\nu - 5) - \Pi_1(\nu + 5)| = \Pi_1(\nu - 5) + \Pi_1(\nu + 5)$.
(faire un dessin des fonctions $\Pi_1(\nu - 5) - \Pi_1(\nu + 5)$ et $\Pi_1(\nu - 5) + \Pi_1(\nu + 5)$ pour comprendre la dernière égalité)

3 °)

Le théorème de Plancherel donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\nu)|^2 d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} (\Pi_1(\nu - 5) + \Pi_1(\nu + 5))^2 d\nu.$$

On remarque que la fonction $\Pi_1(\nu - 5) + \Pi_1(\nu + 5)$ ne prend que les valeurs 0 et 1, donc $(\Pi_1(\nu - 5) + \Pi_1(\nu + 5))^2 = \Pi_1(\nu - 5) + \Pi_1(\nu + 5)$. On en déduit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_1(\nu - 5) + \Pi_1(\nu + 5) d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_1(\nu - 5) d\nu + \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_1(\nu + 5) d\nu = 1 + 1 = 2.$$

4 °)

a)

$$x\left(t + \frac{2}{5}\right) = 1 + \cos(5\pi t + 2\pi) + \frac{1}{2} \sin(10\pi t + 4\pi) = 1 + \cos(5\pi t) + \frac{1}{2} \sin(10\pi t) = x(t).$$

- b)** Il est déterministe à puissance moyenne finie.
c)

$$Y(\nu) = TF(h \star x) = H(\nu).X(\nu)$$

$$= \frac{1}{j} (\Pi_1(\nu - 5) - \Pi_1(\nu + 5)) \cdot \left(\delta(\nu) + \frac{1}{2} (\delta(\nu - 2.5) + \delta(\nu + 2.5)) + \frac{1}{4j} (\delta(\nu - 5) - \delta(\nu + 5)) \right).$$

Si l'on développe ce produit, sachant que les fonctions $\Pi_1(\nu - 5)$ et $\Pi_1(\nu + 5)$ sont nulles en dehors des intervalles $[4.5; 5.5]$ et $[-5.5; -4.5]$ respectivement, on remarque que

$$\Pi_1(\nu \pm 5)\delta(\nu) = \Pi_1(\nu \pm 5)\delta(\nu \pm 2.5) = 0,$$

et que

$$\Pi_1(\nu + 5)\delta(\nu - 5) = \Pi_1(\nu - 5)\delta(\nu + 5) = 0.$$

On obtient donc :

$$Y(\nu) = \frac{1}{4j^2} \delta(\nu - 5)\Pi_1(\nu - 5) + \frac{1}{4j^2} \delta(\nu + 5)\Pi_1(\nu + 5) = -\frac{1}{4} (\Pi_1(0)\delta(\nu - 5) + \Pi_1(0)\delta(\nu + 5))$$

$$= -\frac{1}{4} (\delta(\nu - 5) + \delta(\nu + 5)).$$

- d)** En utilisant le résultat ci-dessus, $y(t) = TF^{-1}(Y(\nu)) = -\frac{1}{2} \cos(10\pi t)$.

5 °)

a)

Supposons par l'absurde qu'il existe un ν tel que $\Pi_1(\nu + 5).\Pi_1(\nu - 5) = 0 \neq 0$.

Alors, puisque chacune des fonctions $\Pi_1(\nu - 5)$ et $\Pi_1(\nu + 5)$ ne prennent que 0 et 1 comme valeurs, cela signifie que $\Pi_1(\nu - 5) = 1$ et $\Pi_1(\nu + 5) = 1$. On déduit que $-0.5 \leq \nu - 5 \leq 0.5$ et $-0.5 \leq \nu + 5 \leq 0.5$, c'est à dire $4.5 \leq \nu \leq 5.5$ et $-5.5 \leq \nu \leq -4.5$, ce qui est impossible, les deux inégalités étant contradictoires.

Donc, $\Pi_1(\nu + 5).\Pi_1(\nu - 5) = 0$.

- b)** Par les propriétés du produit de convolution,

$$Z(\nu) = TF(h \star h) = H^2(\nu) = \left(\frac{1}{j} (\Pi_1(\nu - 5) - \Pi_1(\nu + 5)) \right)^2$$

$$= -(\Pi_1(\nu - 5) - \Pi_1(\nu + 5))^2 = -\Pi_1^2(\nu - 5) - \Pi_1^2(\nu + 5) + 2\Pi_1(\nu + 5).\Pi_1(\nu - 5)$$

$$= -\Pi_1^2(\nu - 5) - \Pi_1^2(\nu + 5) = -\Pi_1(\nu - 5) - \Pi_1(\nu + 5),$$

en utilisant d'une part le résultat de la question précédente, et d'autre part le fait que $\Pi_1^2 = \Pi_1$.

- c)** On a :

$$Z(\nu) = -(\Pi_1(\nu - 5) + \Pi_1(\nu + 5)) = -\delta(\nu - 5) \star \Pi_1(\nu) - \delta(\nu + 5) \star \Pi_1(\nu).$$

En prenant la transformation de Fourier inverse, on a :

$$z(t) = -TF^{-1}(\delta(\nu - 5)).TF^{-1}(\Pi_1(\nu)) - TF^{-1}(\delta(\nu + 5)).TF^{-1}(\Pi_1(\nu))$$

$$= -e^{10j\pi\nu t} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} - e^{-10j\pi\nu t} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = -2 \cos(10j\pi\nu t) \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}.$$

Exercice 2 : 4 points

1 °) On pose $V_1(x, y) = 3x^2 + 4xy - 3y^2$ et $V_2(x, y) = 2x^2 - 6xy - 2y^2$.
On calcule :

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = 4x - 6y,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = 4x - 6y.$$

Puisque $\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}$, on déduit que $\varphi(x, y)$ dérive d'un potentiel.

De l'égalité $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3x^2 + 4xy - 3y^2$ on déduit que $\varphi(x, y) = x^3 + 2x^2y - 3y^2x + a(y)$, a étant une fonction dérivable d'une variable. De l'égalité $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2x^2 - 6xy - 2y^2$, on déduit que $a'(y) = -2y^2$
d'où $a(y) = -\frac{2}{3}y^3 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

On a donc

$$\varphi(x, y) = x^3 + 2x^2y - 3y^2x - \frac{2}{3}y^3 + k.$$

Sachant que $\varphi(1, 3) = 0$, on obtient $k = 38$. On a donc

$$\varphi(x, y) = x^3 + 2x^2y - 3y^2x - \frac{2}{3}y^3 + 38.$$

2 °)

$$\operatorname{div}(\vec{V}(x, y)) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 6x + 4y - 6x - 4y = 0$$

Exercice 3 : 3 points

1 °)

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x^2y + x \cos y$ implique que (en intégrant par rapport à y) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + x \sin y + a(x)$ puis $f(x, y) = \frac{1}{6}x^2y^3 - x \cos y + ya(x) + b(x)$, où a et b sont deux fonctions de la variable x .

2 °)

Il s'agit d'abord de résoudre l'edo :

$$y''(t) - 9y(t) = 0$$

dont la solution générale est

$$y(t) = Ae^{-3t} + Be^{3t}.$$

On déduit ici que $f(x, y) = A(y)e^{-3x} + B(y)e^{3x}$ où A et B sont des fonctions de la variable y .

Exercice 4 : 5 points

1 °)

a)

On calcule

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2 \cdot 2^n} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n}.$$

On a donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n} \sim \frac{1}{2}.$$

$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$ donc la série $\sum u_n$ converge.

b)

On a $0 < u_n = \frac{n}{2^n} < \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{2^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

La série géométrique $\sum \left(\frac{3}{4}\right)^n$ converge car $-1 < \frac{3}{4} < 1$, donc par comparaison, la série $\sum u_n$ converge.

2 °)

a)

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n-1}} - \frac{n+2}{2^n} = \frac{2n+2}{2^n} - \frac{n+2}{2^n} = \frac{n}{2^n} = a_n.$$

b)

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N u_n &= \sum_{i=0}^N (a_i - a_{i+1}) = \sum_{i=0}^N a_i - \sum_{i=0}^N a_{i+1} = \sum_{i=0}^N a_i - \sum_{i=1}^{N+1} a_i \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^N a_i - \sum_{i=1}^N a_i - a_{N+1} = a_0 - a_{N+1} = \frac{1}{2^{-1}} - \frac{N+2}{2^N} = 2 - \frac{N+2}{2^N}. \end{aligned}$$

c) En déduire la valeur de S .

Si N tend vers l'infini, $\frac{N+2}{2^N}$ tend vers 0 (croissances comparées) donc

$$S = \lim_{i=0}^N u_n = \lim \left(2 - \frac{N+2}{2^N}\right) = 2.$$

← ~~~~~→