Département GEII

Année 2017/2018
20 Mars 2018

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé n$^{\text{o}}$3 (1h30)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.
Le barème est sur 24 mais la note sera laissée telle quelle sur 20.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *6 points*
Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^2 \frac{1}{(3t-1)^4}\, dt,$$

Correction :

$$I = \int_1^2 (3t-1)^{-4}\, dt = \frac{1}{3}\int_1^2 3(3t-1)^{-4}\, dt = \frac{1}{3}\left[\frac{(3t-1)^{-3}}{(-3)}\right]_1^2 = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{125}\right)\frac{1}{9} = \frac{117}{9000} = 0,013.$$

$$J = \int_0^1 xe^{x^2-3}\, dx,$$

Correction :

$$J = \int_0^1 xe^{x^2-3}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2-3}\, dx = \frac{1}{2}\left[e^{x^2-3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}[e^{-2} - e^{-3}] = \frac{1}{2}\left(\frac{e-1}{e^3}\right) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{-2} - \varepsilon^{-3}\right).$$

$$K = \int_0^\pi \sin(3t)\, dt,$$

Correction :

$$K = \int_0^\pi \sin(3t)\, dt = \frac{1}{(-3)}\int_0^\pi (-3)\sin(3t)\, dt = \frac{-1}{3}[\cos(3t)]_0^\pi = \frac{2}{3}.$$

$$L = \int_2^5 \frac{dt}{(t-1)(t+1)}.$$

Correction :

$$L = \int_2^5 \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = \int_2^5 \frac{1/2}{(t-1)} - \frac{1/2}{(t+1)}\, dt = \frac{1}{2}\left[\ln(|t-1| - \ln|t+1|\right] = \frac{1}{2}\ln 2.$$

1. NEC PLURIBUS IMPAR

$M = \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^4 t \, dt.$

Correction :

$$M = \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^4 t \, dt = -\int_0^{\pi/2} -\sin t \cos^4 t \, dt = [\frac{-\cos^5 t}{5}]_0^{\pi/2} = \frac{1}{5}.$$

Exercice 2 : *6 points*
Soit $I = \int_0^1 \sqrt{t} \ln(1+t) \, dt$.

1 °) A l'aide du changement de variable $t = s^2$ et en détaillant les étapes, montrer que

$$I = 2\int_0^1 s^2 \ln(1+s^2) \, ds.$$

Correction :

On admet que l'on choisit $s \geq 0$ et on obtient en différentiant l'égalité $s^2 = t$, $2sds = dt$, puis on change les bornes :
$t = 0 \Rightarrow s = 0$ et $t = 1 \Rightarrow s = 1$. enfin on remplace t par s^2 dans la fonction à intégrer, d'où :

$$I = \int_0^1 s \ln(1+s^2) \, 2sds = I = 2\int_0^1 s^2 \ln(1+s^2) \, ds.$$

---

2 °) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{s^4}{1+s^2} ds.$

Correction :

On pose $u(s) = \ln(1+s^2)$ et $v'(s) = s^2$ d'où : $u'(s) = \frac{2s}{1+s^2}$ et $v = (1/3)s^3$. On applique la formule d'IPP et on obtient :

$$I = 2\left([(1/3)s^3 \ln(1+s^2)]_0^1 - \int_0^1 (1/3)s^3 \frac{2s}{1+s^2} ds\right) = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{s^4}{1+s^2} ds.$$

---

3 °)

a) Vérifier que $\frac{s^4}{1+s^2} = s^2 - 1 + \frac{1}{1+s^2}.$

2. NEC PLURIBUS IMPAR

Correction :

On écrit : $\dfrac{s^4}{1+s^2} = \dfrac{(s^4-1)+1}{1+s^2} = \dfrac{(s^2-1)(s^2+1)}{1+s^2} + \dfrac{1}{1+s^2} = s^2 - 1 + \dfrac{1}{1+s^2}$

---

b) En déduire la valeur de I.

Correction :

D'où : $I = \dfrac{2}{3}\ln 2 - \dfrac{4}{3}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{s^4}{1+s^2}ds = \dfrac{2}{3}\ln 2 - \dfrac{4}{3}\displaystyle\int_0^1 (s^2 - 1 + \dfrac{1}{1+s^2})ds = \dfrac{2}{3}\ln 2 - \dfrac{4}{3}[1/3s^3 - s + \arctan s]_0^1 = \dfrac{2}{3}\ln 2 + 8/9 - \pi/3$.

Exercice 3 : *6 points*
Soit l'équation différentielle d'ordre deux :

$$(E)\ \ y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2\cos t.$$

1 °) Résoudre l'équation homogène associée à (E). On appelle $y_H(t)$ une solution de l'équation homogène.

Correction :

$$(E_H)\ \ y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0.$$

D'où l'équation caractéristique : $m^2 + 2m + 1 = 0$ avec la solution double $m = -1$. D'où

$$y_H(t) = (\alpha t + \beta)e^{-t},$$

avec α et β réels.

---

2 °) Vérifier que $y_p(t) = \sin t$ est une solution particulière de (E).

Correction :

Il suffit de remplacer $y(t)$ par $\sin t$ dans (E) ce qui donne : $-\sin t + 2\cos t + \sin t = 2\cos t$ égalité vérifiée.

---

3 °) Déterminer la solution spéciale de (E) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ (appelée solution du système initialement au repos).

Correction :

D'après le théorème de structure on a :

$$y_s(t) = y_H(t) + y_p(t) = (\alpha t + \beta)e^{-t} + \sin t.$$

3. NEC PLURIBUS IMPAR

On calcule alors α et β avec les CI : $y(0) = 0 = \beta$ et $y'(0) = 0 = \alpha - \beta + 1$ et donc $\alpha = -1$ et

$$y_s(t) = -te^{-t} + \sin t.$$

---

4 °) Prouver que si $t \geq 7$, on a $y(t) = y_p(t)$ à 10^{-2} près.

Correction :

Il faut prouver que si $t \geq 7$ alors on a $|-te^{-t}| \leq 10^{-2}$. Après avoir calculé la dérivée de te^{-t} on trouve qu'elle atteint un maximum en $t = 1$ et décroit à partir de $t = 1$ et on calcule $7e^{-7} = 0.0063$.

Exercice 4 : *4 points*
Soit l'équation différentielle (E) $y'(t) + \alpha y(t) = f(t)$ où $f(t)$ est une fonction continue donnée et α un réel donné.
On suppose que l'on connait une solution $y_h(t)$ de l'équation homogène associée à (E) :

$$y_h(t) = 3e^{(2/3)t}$$

et une solution particulière $y_p(t)$ de (E) :

$$y_p(t) = (t-1)e2t$$

.

1 °)
Trouver alors α (grace à $y_h(t)$) et en déduire $f(t)$.

Correction :

On sait que les solutions de l'équation homogène associée à (E) s'écrivent sous la forme : $y_h(t) = Ce^{-\alpha t}$ avec C réel quelconque. Par identification avec celle proposée on en déduit que :

$$\alpha = -2/3.$$

De plus, $y_p(t)$ est solution de (E) d'où vérifie : $e^{2t} + 2(t-1)e^{2t} - 2/3(t-1)e^{2t} = f(t)$, et donc :

$$f(t) = e^{2t}\left(-1/3 + (4/3)t\right) = \frac{4t-1}{3}e^{2t}.$$

---

2 °)
Trouver la solution spéciale de (E) vérifiant $y(0) = 0$.

Correction :

D'après le théorème de structure on a :

$$y(t) = Ce^{(2/3)t} + (t-1)e^{2t}.$$

On calcule C en utilisant la condition initiale : $y(0) = 0$ d'où $C - 1 = 0$ et $C = 1$ et

$$y_s(t) = e^{(2/3)t} + (t-1)e^{2t}.$$

---

4. NEC PLURIBUS IMPAR