Institut Universitaire de Technologie
Aix-Marseille Université

Département GEII

Année 2016/2017
6 Juin 2017

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé n°4 (1h30) CORRIGE

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *4 points*
Faire attention à la rédaction pour cet exercice ; il faut bien donner tous les arguments

1 °)
Si $t \to +\infty$, $f(t) = \dfrac{2t^3 - 4t + 1}{5t^4 - 2t^3 + t + 1} \sim \dfrac{2t^3}{5t^4} = \dfrac{2}{5}\dfrac{1}{t} > 0$.
Le critère de Riemann dit que $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ diverge. Le critère de comparaison implique alors que $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge.

2 °) a)
Par les croissances comparées, on a $\displaystyle\lim_{+\infty} \frac{t}{e^t} = 0$, donc si t est assez grand, $\dfrac{t}{e^t} < 1$ d'où $t < e^t$ en multipliant par $e^t > 0$. D'après le cours $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$ converge.

b)
On a $t < e^t$ en $+\infty$, d'où $0 \leq te^{-2t} \leq e^t.e^{-2t} = e^{-t}$ en $+\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$ converge d'après le cours, donc par le critère de comparaison cette fois, $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-2t}\, dt$ converge.

c)
Si $t \to +\infty$ alors : $\dfrac{t^2+t+1}{t+3} \sim t$, et $\dfrac{t^2+t+1}{t+3}e^{-2t} \sim te^{-2t} > 0$.
D'après la question précédente, $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-2t}\, dt$ converge, donc par le critère d'équivalence, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2+t+1}{t+3}e^{-2t}\, dt$ converge.

Exercice 2 : *7 points*

1 °) a)
Le polynôme $p^2+(a-1)p-a$ possède deux racines ou une racine double ; la seule possibilité pour avoir un pôle simple est que la fraction se simplifie par $p-1$. Par division euclidienne $p^2+(a-1)p-a = (p-1)(p+a)$ (ou écrire plus astucieusement : $p^2+(a-1)p-a = p^2-p+ap-a = p(p-1)+a(p-1) = (p+a)(p-1)$ ou encore en calculant les racines grace au calcul du discriminant et à l'identité

remarquable : $a^2+2a+1=(a+1)^2$).

On a donc $H(p)=\dfrac{p-1}{p^2+(a-1)p-a}=\dfrac{p-1}{(p-1)(p+a)}=\dfrac{1}{p+a}$. On a donc un seul pôle réel simple qui vaut $-a$.

b) Si $a>0$, le système est stable (la règle est : partie réelle des pôles doit être strictement négative, ici on a un pôle réel strictement négatif) sinon le système est instable.

2 °) $y_{a,imp}(t)$ est l'original par la transformation de Laplace de $H(p)=\dfrac{1}{p+a}$. Le formulaire donne $y_{a,imp}(t)=e^{-at}U(t)$.

D'après le cours, le système est stable si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}|y_{a,imp}(t)|dt$ converge, c'est à dire ici $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-at}dt$ converge. Cela équivaut à la condition $a>0$, ce qui est bien la réponse trouvée à la question précédente.

3 °)

$y_a(t)$ est le signal de sortie du système, $h_a(t)$ est la réponse impulsionnelle et $x(t)$ est le signal d'entrée.

4 °)

On sait que $y_{1,ind}=\displaystyle\int_0^t y_{1,imp}(s)ds=\int_0^t e^{-s}ds=(1-e^{-t})U(t)$.

5 °) $h_1(t)=\dfrac{d(y_{1,ind}(t))}{dt}=(y_{1,ind}(t))'$.

Exercice 3 : *9 points + 2 bonus*

1 °)

On voit (grâce à tous les exercices similaires faits en TD....) que $\omega=\dfrac{\pi}{3}$. On en déduit que $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=6$.

2 °)

$A_0=1$, $A_1=1$ et $B_3=\dfrac{1}{2}$.

3 °) On a $<x(t)>=A_0=1$.

Par le Théorème de Parseval, $<x^2(t)>=A_0^2+\dfrac{1}{2}\left(A_1^2+B_3^2\right)=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{13}{8}$.

4 °)

a)

On utilise les formules de linéarisation $\cos(a)\cos(b)=\dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$ et $\sin(a)\cos(b)=\dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$.

$$\begin{aligned}
y(t)=\cos(2\pi t)\times x(t)&=\cos(2\pi t)\left(1+\cos(\frac{\pi}{3}t)+\frac{1}{2}\sin(\pi t)\right)\\
&=\cos(2\pi t)+\cos(2\pi t)\cos(\frac{\pi}{3}t)+\frac{1}{2}\cos(2\pi t)\sin(\pi t)\\
&=\cos(2\pi t)+\frac{1}{2}\left(\cos(\frac{7\pi}{3}t)+\cos(\frac{5\pi}{3}t)\right)+\frac{1}{4}\left(\sin(3\pi t)+\sin(-\pi t)\right)\\
&=\frac{-1}{4}\sin(\pi t)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{3}t\right)+\cos(2\pi t)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{3}t\right)+\frac{1}{4}\sin(3\pi t).
\end{aligned}$$

b)

c)

Par le Théorème de Parseval,

$$< x^2(t) >= 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) = \frac{13}{16}$$

Bonus +2 points

d) C'est celle qui a la plus grand amplitude, c'est à dire celle de pulsation 2π. C'est donc l'harmonique d'ordre 6.

e)

On calcule $100.\frac{\frac{1}{2}}{< x^2(t) >} = \frac{1600}{26} \sim 61.54$