Département GEII [1] Année 2019/2020
14 Janvier 2020

MATHÉMATIQUES - 1A - Devoir surveillé n$^{\text{o}}$2 (1H30')

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction sinon des points seront enlevés)
Pas de téléphone portable ni de montre connectée.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *6 points*
Soit $F(X) = \dfrac{3X^4 + 7X^3 + 2X^2 + 9X + 3}{(X+1)^3(X^2+X+4)}$.
On admet que cette fraction est irréductible. La décomposition en éléments simples est donc de la forme :

$$\frac{AX+B}{X^2+X+4} + \frac{C}{X+1} + \frac{D}{(X+1)^2} + \frac{E}{(X+1)^3}.$$

On donne $A = 2$ et $B = -5$. Trouver C, D et E.

On commence par $E = [(X+1)^3 F(X)]_{X=-1} = -2$.
Pour C on multiplie $F(X)$ par X dans $F(X) = \dfrac{AX+B}{X^2+X+4} + \dfrac{C}{X+1} + \dfrac{D}{(X+1)^2} + \dfrac{E}{(X+1)^3}$ et on fait tendre X vers $+\infty$. On trouve : $3 = A + C$ d'où $C = 1$.
Enfin pour trouver D il suffit de donner à X une valeur numérique par exemple $X = 0$ ce qui donne dans $F(X) = \dfrac{AX+B}{X^2+X+4} + \dfrac{C}{X+1} + \dfrac{D}{(X+1)^2} + \dfrac{E}{(X+1)^3}$
$3/4 = -5/4 + 1 + D - 2$ soit $D = 3$.

Exercice 2 : *5 points*
1 °) Ecrire sous forme exponentielle la fonction $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

$f(x) = exp^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$.

---

2 °) Donner son domaine de definition.

Donc $\mathcal{D}_f =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$

On considère maintenant la fonction $h(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$
3 °) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$

---

1. M. Cristofol, E. Jalade, 24/12/19,

$\lim_{x\to 0} h(x) = e$

4 °) Calculer $\lim_{x\to+\infty} h(x)$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1$

Exercice 3 : *4 points*
Soit la fraction rationnelle $F_a(X) = \dfrac{(3X-6)(X-1)}{(X-a)^2(X^2-2X+10)}$.
Donner la décomposition formelle (sans calculer les coefficients) en éléments simples de $F_a(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$ en discutant suivant les valeurs de a réel.

Si $a = 1$ $F_1(X) = \dfrac{(3X-6)}{(X-1)(X^2-2X+10)} = \dfrac{A}{X-1} + \dfrac{BX+C}{(X^2-2X+10)}$.
Si $a = 2$ $F_2(X) = \dfrac{3(X-1)}{(X-2)(X^2-2X+10)} = \dfrac{A'}{X-2} + \dfrac{B'X+C'}{(X^2-2X+10)}$.
Si $a \neq (1,2)$ alors $F_a(X) = \dfrac{A"}{X-a} + \dfrac{B"}{(X-a)^2} + \dfrac{C"X+D"}{(X^2-2X+10)}$.

Exercice 4 : *4 points*
On considère les fonctions : $f_a(x) = e^{ax}, a \in \mathbb{R}$, $g_b(x) = (\ln x)^b, b \in \mathbb{N}^*$ et $h_c(x) = x^c, c > 0$.
1 °)
Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{h_{100}(x)}$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{h_1(x)}{g_{100}(x)}$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{h_{100}(x)} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{h_1(x)}{g_{100}(x)} = +\infty$

2 °)
Pour quelles valeurs de a a-t-on $\lim_{x\to+\infty} f_a(x)h_c(x) = 0$?

$a < 0$

3 °) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f_a(x)g_b(x)h_c(x)$.

$\lim_{x\to 0^+} f_a(x)g_b(x)h_c(x) = 0$.

Exercice 5 : *4 points*
Le but de cet exercice est de montrer que les racines de $P(X) = X^4 + X^2 + 2X - 2$ sont simples.
1 °) Calculer : $4P(X) - XP'(X)$.

$4P(X) - XP'(X) = 2X^2 + 6X - 8 = 2(X^2 + 3X - 4)$

2 °) On suppose en raisonnant par l'absurde qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que z est racine double (au moins) de $P(X)$.
a) A l'aide de la première question, montrer que $z^2 + 3z - 4 = 0$.

Si z est racine double z annule P et P' donc annule $4P(X) - XP'(X)$ donc annule $(X^2 + 3X - 4)$.

b) En déduire que $P(X)$ n'a pas de racines multiples.

Or $z^2 + 3z - 4 = 0$ a pour racine 1 et -4 qui ne sont pas racines de $P(X) = 0$.