Exercice 1

Attention parler de $\sqrt{j}$n'a strictement aucun sens !!

1) Il y a 4 solutions : $z_1 = e^{j\frac{\pi}{4}} z_1 = e^{3j\frac{\pi}{4}} z_1 = e^{-j\frac{\pi}{4}} z_1 = e^{-3j\frac{\pi}{4}}$
2) On a une première factorisation dans $\mathbb{C}[X] P(X) = (X - e^{j\frac{\pi}{4}})(X - e^{-j\frac{\pi}{4}})(X - e^{3j\frac{\pi}{4}})(X - e^{-3j\frac{\pi}{4}})$.

En utilisant le fait que $(X-\lambda)(X-\bar{\lambda}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda)X + |\lambda|^2$, on a

$P(X) = \left(X^2 - 2\mathrm{Re}(e^{j\frac{\pi}{4}})X + \left|e^{j\frac{\pi}{4}}\right|^2\right)\left(X^2 - 2\mathrm{Re}(e^{3j\frac{\pi}{4}})X + \left|e^{3j\frac{\pi}{4}}\right|^2\right)$

$= (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$

Exercice 2

Attention parler de $\sqrt{j}$n'a strictement aucun sens !!

1) $z = \pm\sqrt{8}e^{j\frac{\pi}{4}} = \pm(2 + 2\mathrm{j})$.
2) On trouve $\Delta = 8\mathrm{j}$: on peut prendre alors d'après le 1) $\delta = 2 + 2\mathrm{j}$ce qui donne deux solutions à l'équation donnée :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2\mathrm{a}} = \frac{4-2-2\mathrm{j}}{2} = 1 - j$$
$$z_2 = \frac{-b+\delta}{2\mathrm{a}} = \frac{4+2+2\mathrm{j}}{2} = 3 + j.$$

Exercice 3

1) $z = 2e^{-j\frac{\pi}{6}}$
2) $z = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi}{10}} = e^{j\frac{\pi}{10} + j\frac{\pi}{2}} = e^{3\mathrm{j}\frac{\pi}{10}}$
3) $z = 3e^{-j\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 4

1) Oui. $P(X) = (X-4)^2(X-\pi)(X+\pi)$
2) Oui. $P(X) = (X-4)^2(X^2+1)$qui admet aussi comme racines j et $-j$.
3) Non. Si il admettait une racine réelle $a \neq 4$et une racine non réelle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$,alors il serait divisible par $(X-4)^2(X-a)(X^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda)X + |\lambda|^2)$qui est de degré 5, donc le degré de P serait au mois égal à 5, ce qui n'est pas.

Exercice 5

1) $P(X) = 2(X-5)\left(X + \frac{1}{2}\right) = (X-5)(2\mathrm{X}+1)$
2) $Q(X) = P(X^2) = (X^2-5)(2\mathrm{X}^2+1) = (X-\sqrt{5})(X+\sqrt{5})(2\mathrm{X}^2+1)$et le polynôme $2\mathrm{X}^2 + 1$est irréductible sur $\mathbb{R}$.

Attention : ne pas confondre $P(X^2)$et $(P(X))^2$.

Exercice 6

1) 1 est racine d'ordre supérieur ou égal à 2 du polynôme

$\Leftrightarrow P(1) = P'(1) = 0$

$\Leftrightarrow 1 + a + b = 0 \text{et} 3 + a = 0 \Leftrightarrow a = -3 \text{et} b = 2.$

On vérifie que dans ce cas $P''(1) = 6 \neq 0$:la racine est exactement double.

2) Le problème revient à ce que – 2 soit racine d'ordre supérieur ou égal à 2 du polynôme, ce qui équivaut à ce que $P(-2) = P'(-2) = 0$, c'est à dire $-8 - 2\mathrm{a} + b = 0 \text{et} 12 + a = 0$ce qui donne $a = -12 \text{et} b = -16$.