Exercice 1
a) Le signal est une portion de sinusoïde à durée finie : il est déterministe à énergie finie car de durée fini
b)
c) $X(\nu) = X_1(\nu) * X_2(\nu) = 2\frac{\sin(2\pi\nu)}{2\pi\nu} * \frac{1}{2}(\delta(\nu-1) + \delta(\nu+1))$
$= \frac{\sin(2\pi(\nu-1))}{2\pi(\nu-1)} + \frac{\sin(2\pi(\nu+1))}{2\pi(\nu+1)} = \frac{\sin(2\pi\nu)}{2\pi(\nu-1)} + \frac{\sin(2\pi\nu)}{2\pi(\nu+1)} = \sin(2\pi\nu)\left(\frac{1}{2\pi(\nu-1)} + \frac{1}{2\pi(\nu+1)}\right) =$
$\sin(2\pi\nu)\left(\frac{\nu}{\pi(\nu^2-1)}\right)$.
d) $E = \int_{\mathbb{R}} x(t)^2 dt = \int_{-1}^{1} \cos^2(2\pi t)dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(1 + \cos(4\pi t))\, dt = 1$.(par linéarisation de $\cos^2$)
e) $S_x(\nu) = |X(\nu)|^2 = \sin^2(2\pi\nu)\left(\frac{\nu^2}{\pi^2(\nu^2-1)^2}\right)$
f) $\int_{\mathbb{R}} S_x(\nu)dt = E = 1$.

Exercice 2
1) $y(t) = x*h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0(t-s)}h(s)ds = e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sj\omega_0}h(s)ds =$
$e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2j\pi\frac{\omega_0}{2\pi}s}h(s)ds$
$= H\left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right)e^{j\omega_0 t}$.
2) La quantité $H\left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right)$représente l'amplitude complexe de la sortie, donc on doit avoir ici $\left|(H\left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right))\right| = 1$**,** c'est à dire que son amplitude réelle vaut 1.

Exercice 3
1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{y^2} - 2\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x^2}{y^3} + 4y - 2$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{y^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{6x^2}{y^4} + 4\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{-4x}{y^3}$.
2) Si (x_0,y_0)est un point singulier, alors $\left(0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{2x_0}{y_0^2} - 2\right) \Rightarrow (x_0 = y_0^2)$.
On a alors aussi $\left(0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{-2x_0^2}{y_0^3} + 4y_0 - 2 = \frac{-2y_0^4}{y_0^3} + 4y_0 - 2 = -2y_0 + 4y_0 - 2\right) \Rightarrow$ $(y_0 = 1)$.
On a alors $x_0 = y_0^2 = 1$.

3) On calcule :$\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right)$
$= \frac{16x^2}{y^6} - \frac{2}{y^2}.\left(\frac{6x^2}{y^4} + 4\right) = \frac{16x^2}{y^6} - \frac{12x^2}{y^6} - \frac{8}{y^2} = \frac{4x^2}{y^6} - \frac{8}{y^2}$.
Avec $x = y = 1$on a$\Delta = -4 < 0$.On a un extremum.
De plus $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = 2 > 0$:on a un minimum local.

4) a) $\left(\frac{x}{y} - y\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{y}.y + y^2 + y^2 - 2y + 1 = \frac{x^2}{y^2} - 2x + 2y^2 - 2y + 1 =$ $f(x,y) + 1$.
b) On a $f(1,1) = -1$donc
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) + 1 = f(x,y) - f(1,1) = ()^2 + ()^2 \geq 0$donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) - f(1,1) \geq 0$:le minimum trouvé est global.

Exercice 4

1) On calcule $\frac{\partial V_1}{\partial y} = e^{-x}$et $\frac{\partial V_2}{\partial x} = e^{-y}$donc les fonctions (à deux variables) $\frac{\partial V_1}{\partial y}$ et $\frac{\partial V_2}{\partial x}$sont différentes : le champ de vecteurs n'est pas un champ de gradients.

2) a) On calcule cette fois $\frac{\partial W_1}{\partial y} = f'(y)e^{-x}$et $\frac{\partial W_2}{\partial x} = g'(x)e^{-y}$donc :
le champ de vecteur dérive d'un potentiel si et seulement si
$\forall x, y \in \mathbb{R}, f'(y)e^{-x} = g'(x)e^{-y}$
$\forall x, y \in \mathbb{R}, \frac{f'(y)}{e^x} = \frac{g'(x)}{e^y}$
$\forall x, y \in \mathbb{R}, f'(y)e^y = g'(x)e^x$(produits en croix égaux).
b) D'après la propriété rappelée en préambule$\exists k \in \mathbb{R}: \forall x, y \in \mathbb{R}, f'(y)e^y = g'(x)e^x = k$d'où :

(i) $f'(y) = ke^{-y}$ce qui implique par intégration que $f(y) = a - ke^{-y}$pour un certain $a \in \mathbb{R}$,
(ii) $g'(x) = ke^{-x}$ce qui implique par intégration que $g(x) = b - ke^{-x}$pour un certain $b \in \mathbb{R}$.

On a donc $W_1(x, y) = (a - ke^{-y})e^{-x} = ae^{-x} - ke^{-x-y}$et de même $W_2(x, y) = be^{-y} - ke^{-x-y}$.
$W_1(0; 0) = W_2(0; 0) = 0 \Rightarrow a = ketb = k$: λest la valeur commune de ces trois paramètres *a, b* et *k*. .

c) $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = e^{-x} - e^{-x-y}$donc $\varphi(x, y) = -e^{-x} + e^{-x-y} + \alpha(y)$pour une certaine fonction dérivable $\alpha(y)$.
$e^{-y} - e^{-x-y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -e^{-x-y} + \alpha'(y)$donc $\alpha'(y) = e^{-y} \Rightarrow \alpha(y) = c - e^{-y}$.
$\varphi(x, y) = -e^{-x} + e^{-x-y} - e^{-y} + c = -e^{-x} + e^{-x-y} - e^{-y} + 1$par la condition $\varphi(0; 0) = 0$.