



Institut Universitaire
de Technologie
Aix-Marseille Université

Dpt GEII Marseille 1A¹.

2020-2021

MATHÉMATIQUES. Correction DS n°1 (1h30)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Devoir noté sur 22 mais pas de note supérieure à 20

Exercice 1 : 6 points

Écrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

$$z_1 = 6j = 6e^{j\pi/2}$$

$$z_2 = -je^{j\frac{\pi}{5}} = e^{-j\frac{3\pi}{10}}$$

$$z_3 = \sqrt{6} - j\sqrt{2} = 2\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$z_4 = \frac{(2e^{ja})^2}{3e^{3j}} \text{ (où } a \in \mathbb{R}). z_4 = \frac{4}{3}e^{j(2a-3)}$$

Exercice 2 : 5 points

Soit k un nombre réel.

1 °) Résoudre l'équation $\frac{z-2}{z-1} = kj$.

$$z = \frac{2-kj}{1-kj} \text{ Remarques : } z \text{ existe car } k \text{ réel et } z \neq 1.$$

2 °) Montrer que si z est solution de l'équation ci-dessus, alors : $\left|z - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

$$z - \frac{3}{2} = \frac{2-kj}{1-kj} - \frac{3}{2} = \frac{1+kj}{2(1-kj)} \text{ D'où : } \left|z - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

TPSVP- >

1. M. Cristofol, E. Jalade, version 11/11/20, tous droits réservés

3 °) Soit z un nombre complexe différent de 1 . Montrer que si $\frac{z-2}{z-1}$ est imaginaire pur, alors le point d'affixe z est sur un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

D'après ce qui précède, le cercle est de centre $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

Exercice 3 : 5 points

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnues z suivantes :

1 °) $z^4 = e^{4+3j}$

Si $z = re^{j\theta}$ alors on a $r^4 e^{j4\theta} = e^4 e^{3j}$ d'où : $r^4 = e^4$ et $4\theta = 3$ soit les 4 solutions : $S = \{e^{e^{j\frac{3}{4}}}; e^{e^{j(\frac{3}{4}+\frac{\pi}{2})}}; e^{e^{j(\frac{3}{4}+\pi)}}; e^{e^{j(\frac{3}{4}+\frac{3\pi}{2})}}\}$

2 °) $e^z = 2e^{4j}$

On pose $z = x + jy$ et on a : $e^x e^{jy} = 2e^{4j}$ soit $x = \ln 2$ et $y = 4 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3 °) $z^2 - j\sqrt{2}z - j\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

On calcule $\Delta = -2 + 2j\sqrt{3} = 4e^{j2\frac{\pi}{3}}$ et donc un δ tel que $\delta^2 = \Delta$ vérifie par exemple $\delta = 2e^{j\frac{\pi}{3}}$.

On en déduit $z_1 = \frac{j\sqrt{2} + 2e^{j\frac{\pi}{3}}}{2}$ et $z_2 = \frac{j\sqrt{2} - 2e^{j\frac{\pi}{3}}}{2}$.

Exercice 4 : 4 points

Soit le polynôme $P(X) = X^4 - 4X^3 - 20X^2 - 4X - 21$.

1 °) Prouver à l'aide de deux méthodes que -3 est racine de $P(X)$.

-
1. $P(-3) = 0$
 2. on fait la division euclidienne de $P(X)$ par $X + 3$ et le reste doit être nul!!!
-

2 °) Justifier le fait que -3 est racine simple de $P(X)$.

Il faut vérifier par exemple que $P'(-3) \neq 0$ ou que le reste de la division de $P(X)$ par $(X+3)^2$ n'est pas nul.

Exercice 5 : 2 points

Calculer l'amplitude complexe du signal $x(t) = \cos(\omega t) + \cos(\omega t + 2\pi/3) + \cos(\omega t - 2\pi/3)$.

$\underline{X} = 1 + e^{j2\pi/3} + e^{-j2\pi/3} = 1 + 2\cos(2\pi/3) = 0$.

Que peut-on en déduire sur ce signal ?

Il est nul!!!

← ~~~~~→