

MATHÉMATIQUES. Correction DS n°3 (1h30)

Exercice 1 : 5 points

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$1^{\circ}) (2e^{3x} - 1)(e^{2x} + 1) > 0$$

On a $e^{2x} + 1 > 0$ donc il suffit de résoudre : $2e^{3x} - 1 > 0$ soit $x > -\frac{\ln 2}{3}$.

$$\ln(2x + 1) \leq 5$$

On n'oublie pas que nécessairement $2x + 1 > 0$ et $2x + 1 \leq e^5$ soit $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{e^5 - 1}{2}$.

$$\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{10}$$

On a $e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\tau}{10}$ soit $-\frac{t}{\tau} = \ln(\frac{\tau}{10})$ et finalement $t = -\tau \ln(\frac{\tau}{10})$.

Exercice 2 : 5 points

$$1^{\circ}) \text{ Calculer } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^3 + 2x + 9}.$$

On applique la limite du rapport des termes de plus haut degré soit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^3 + 2x + 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

$$2^{\circ}) \text{ a) } \sin(3x) \sim 3x \text{ en } 0 \text{ et } e^{2x} - 1 \sim 2x \text{ en } 0 \text{ (cours).}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}.$$

$$3^{\circ})$$

$$\text{a) } \text{Vérifier que } e^x x^4 - e^{2x} = e^{2x} \left(\frac{x^4}{e^x} - 1 \right)$$

évident en développant le membre de droite.

$$\text{b) } \text{En déduire : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x x^4 - e^{2x})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x x^4 - e^{2x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left(\frac{x^4}{e^x} - 1 \right) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \text{ d'après le critère de croissance comparée}$$

et donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x x^4 - e^{2x}) = -\infty.$

TPSVP- >

1. M. Cristofol, E. Jalade, version 30/03/2021, tous droits réservés

Exercice 3 : 3 points

Montrer en utilisant des nombres complexes bien choisis que :

$$(1) \quad \frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = \arctan 5$$

On peut traduire à l'aide de l'argument de nombres complexes bien choisis que :

$\frac{\pi}{4} = \arg(1+j)$, que $\arctan\left(\frac{2}{3}\right) = \arg(3+2j)$ et que $\arctan 5 = \arg(1+5j)$. Avec toutes ces égalités considérées à 2π près et donc (1) se réécrit :

$$(2) \quad \arg(1+j) + \arg(3+2j) = \arg(1+5j) + 2k\pi.$$

Or :

$$\arg(1+j) + \arg(3+2j) = \arg[(1+j)(3+2j)] = \arg(1+5j).$$

De plus (2) est vraie pour $k = 0$ car tous les nombres $\frac{\pi}{4}$; $\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$ et $\arctan 5$ sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

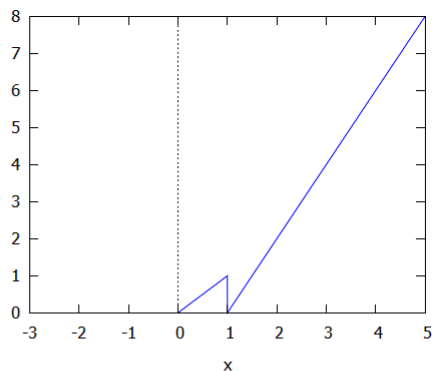
Exercice 4 : 3 points

Représenter graphiquement la fonction f définie par l'expression : $f(t) = t\mathcal{U}(t) + (t-2)\mathcal{U}(t-1)$.

On commence par écrire $f(t)$ par intervalle à cause du retard induit par $\mathcal{U}(t-1)$.

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ f(t) = t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ x(t) = t + (t-2) = 2t-2 & \text{si } 1 \leq t. \end{cases}$$

TPSVP- >



Exercice 5 : 5 points

Soit $f(t)$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par l'expression $f(x) = \frac{2^x}{x}$. On a :

1 °) Vérifier que $\forall x > 0, f(x) = e^{x \ln 2 - \ln x}$.

On a $f(x) = \frac{e^{x \ln 2}}{e^{\ln x}} = e^{x \ln 2 - \ln x}$.

2 °) En déduire que f est dérivable et établir l'expression de sa dérivée sous la forme $f'(x) = \frac{(ax+b)2^x}{x^2}$ où a et b sont deux réels à déterminer.

f est dérivable comme composée de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$. Pour calculer f' **il faut** utiliser l'expression $f(x) = e^{x \ln 2 - \ln x}$. En appliquant la règle de dérivation de $e^{u(x)}$ on déduit : $f'(x) = (\ln 2 - \frac{1}{x})e^{x \ln 2 - \ln x} = \frac{(x \ln 2 - 1)2^x}{x^2}$.

3 °) Montrer que f admet un minimum égal à $e \ln 2$.

On trace le tableau de variation et le minimum est atteint en la solution de $f'(x) = 0$ soit $x \ln 2 - 1 = 0$ soit $x = \frac{1}{\ln 2}$ et la valeur de ce minimum est $f(\frac{1}{\ln 2}) = e \ln 2$. On a :

x	0	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$\searrow$ $e \ln 2$ $\nearrow$	

← ~~~~~→

