

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé 1A (1,5 heure)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : points

Calculer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

1 °) $z_1 = -5j$

2 °) $z_2 = je^{\frac{j\pi}{5}}$

3 °) $z_3 = (1 - j)^7$

4 °) $z_4 = \frac{1 - j\sqrt{3}}{1 + j}$

Exercice 2 : points

Soit l'équation (E) : $z^6 - \sqrt{3}z^3 + 1 = 0$

1 °) Donner le nombre de solutions dans $\mathbb{C}$ de cette équation.

2 °) Résoudre l'équation $Z^2 - \sqrt{3}Z + 1 = 0$ et mettre les solutions sous forme exponentielle.

3 °)

a) Résoudre les équations

$$z^3 = e^{\frac{j\pi}{6}}$$

$$z^3 = e^{\frac{-j\pi}{6}}$$

b) En déduire les solutions de (E).

Exercice 3 : points

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère le polynôme $P(X) = X^3 + aX^2 + aX + 1$.

1 °) Vérifier que -1 est racine de $P(X)$.

2 °) A quelle condition sur a peut-on affirmer que

a) $P(X)$ admet une racine double? Donner la valeur de cette racine double dans chaque cas.

b) $P(X)$ admet une racine triple? Donner la valeur de cette racine triple.

Exercice 4 : points

Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1 °) $Z_1 = (1 + j\sqrt{3})^7 - (1 - j\sqrt{3})^7$.

2 °) $Z_2 = |z|^2 + (\bar{z})^2$ avec $z = re^{j\theta}$ et θ dans $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 5 : *points*

Soit le polynôme $P(X) = X^3 - 6X^2 + 12X - 16$.

- 1 °) Calculer $P(4)$.
- 2 °) Factoriser $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
- 3 °) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (1) $P(X) = 0$.
- 4 °) Exprimer les solutions de (1) sous forme exponentielle et représenter graphiquement ces solutions.