Institut Universitaire de Technologie
Aix-Marseille Université

Département GEII

Année 2017/2018
Mardi 7 Novembre 2017

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé 1A (1,5 heure)

*Remarques*- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

**Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.**

**Exercice 1 :** *6 points*
Calculer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :
**1 °)** $z_1 = -3j$
**2 °)** $z_2 = -4je^j$
**3 °)** $z_3 = (1+\sqrt{3}j)^5$
**4 °)** $z_4 = e^{\frac{j\pi}{8}} + e^{3\frac{j\pi}{8}}$
**5 °)** $z_5 = \dfrac{-1-j\sqrt{3}}{1+j\sqrt{3}}$

**Exercice 2 :** *6 points*
**1 °)** Factoriser en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $Q(X) = X^3+X^2+X+1$.
**2 °)** Soit $P(X) = 3X^4+4X^3+6X^2+12X+a$. Déterminer le réel $a$ pour que le polynôme $P(X)$ admette une racine double réelle.
**3 °)** Pour cette valeur de $a$, factoriser $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

**Exercice 3 :** *4 points*
**1 °)** Démontrer que le polynôme

$$P(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$$

admet le nombre 1 pour racine triple.
**2 °)** En déduire la factorisation en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme

$$P(X) = 3X^5 - 5X^4 + 5X - 3.$$

**Exercice 4 :** *4 points*
On considère le signal $x(t) = \cos(2t) + \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$.

**1 °)** Expliquer pourquoi $x(t)$ est un signal sinusoïdal. Calculer sa période et sa fréquence.
**2 °)** Calculer une expression de l'amplitude complexe de $x(t)$ sous forme algébrique.
**3 °)** Calculer la forme exponentielle de l'amplitude complexe de $x(t)$.
**4 °)** En déduire une expression de $x(t)$ sous la forme $x(t) = A\cos(2t+\varphi)$.

**Exercice 5 :** *3 points*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'équation d'inconnue $z$ :

$$(E) \;\; z^2 - 2z + \alpha = 0.$$

.

**1 °)** Montrer que l'équation $(E)$ admet une solution réelle si et seulement si $\alpha \leq 1$.

**2 °)** On suppose dans cette question que $\alpha > 1$.

**a )** Exprimer en fonction du paramètre $\alpha$ les solutions de $(E)$.

**b )** Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $\alpha$ les solutions sont de module égal à 2 ?