Institut Universitaire
de Technologie
Aix Marseille Université

Département GEII

Année 2018/2019
Mardi 6 Novembre 2018

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé 1A (1,5 heure)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *4 points*
1 °) Calculer les solutions dans $\mathbb{C}$ de :

$$z^4 + 1 = 0.$$

Tracer leur image dans le plan complexe.
2 °) En déduire la factorisation du polynôme $P(X) = X^4+1$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 : *4 points*
1 °) Résoudre l'équation $z^2 = 8j$.
On donnera les solutions sous forme exponentielle puis algébrique.
2 °) Résoudre l'équation :

$$z^2 - 4z + 4 - 2j = 0.$$

On pourra s'aider du 1°).

Exercice 3 : *3 points*
Mettre sous forme exponentielle les complexes suivant :
1 °) $z_1 = \sqrt{3} - j$.
2 °) $z_2 = je^{j\pi/10}$.
3 °) $z_3 = -3j$.

Exercice 4 : *4 points*
Si un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré 4 admet le réel 4 pour racine double, peut-il avoir pour ses deux racines restantes :
1 °) Deux autres racines réelles ?
2 °) Deux autres racines complexes non réelles ?
3 °) Une racine réelle différente de 4 et une racine complexe non réelle ?
On donnera un exemple pour chaque réponse 'oui' et une preuve pour chaque réponse 'non'.

Exercice 5 : *4 points*
1 °) Factoriser $P(X) = 2X^2 - 9X - 5$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
2 °) En déduire la factorisation en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ de

$$Q(X) = 2X^4 - 9X^2 - 5.$$

Exercice 6 : *4 points*

1 °) Trouver les réels a et b sachant que 1 est racine double de $X^3 + aX + b$.

2 °) Trouver les réels a et b sachant que $X^3 + aX + b$ est divisible par $(X + 2)^2$.