Institut Universitaire de Technologie
Aix-Marseille Université

Département GEII

Année 2016/2017
5 Novembre 2016

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé 2A N°1 (2 Heures)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *9 points*

On considère le système linéaire défini par l'équation : $y = h \star x$ avec $h(t) = 2\sin(10\pi t)\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$.

1 °)

a) Donner l'expression de la transformée de Fourier de la fonction : $t \to 2\sin(10\pi t)$.

b) En déduire en utilisant le produit de convolution que :

$$H(\nu) = \frac{1}{j}\left(\Pi_1(\nu - 5) - \Pi_1(\nu + 5)\right).$$

c) Représenter graphiquement la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\nu \to jH(\nu)$.

2 °) Donner l'expression du spectre d'amplitude de $h(t)$ et le représenter graphiquement.

3 °) On suppose que $h(t)$ est à énergie finie. Calculer la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t)dt$.

4 °) On considère l'entrée $x(t) = 1 + \cos(5\pi t) + \dfrac{1}{2}\sin(10\pi t)$.

a) Montrer que $x(t)$ est périodique de période $\dfrac{2}{5}$.

b) Quel est le type de ce signal ?

c) Prouver que $Y(\nu) = -\dfrac{1}{4}\left(\delta(\nu - 5) + \delta(\nu + 5)\right)$.

d) En déduire l'expression de la sortie $y(t)$.

5 °) Dans cette question, on pose $z = h \star h$

a) Prouver que $\forall \nu \in \mathbb{R},\ \Pi_1(\nu + 5).\Pi_1(\nu - 5) = 0$

b) En déduire que $Z(\nu) = -\left(\Pi_1(\nu - 5) + \Pi_1(\nu + 5)\right)$.

c) En déduire enfin l'expression de $z(t)$. Donner une expression similaire à celle de $h(t)$.

Exercice 2 : *4 points*

On considère le champ vectoriel $\overrightarrow{V}(x, y) = (3x^2 + 4xy - 3y^2)\vec{i} + (2x^2 - 6xy - 2y^2)\vec{i}$.

1 °) Montrer que le champ $\overrightarrow{V}(x, y)$ dérive d'un potentiel $\varphi(x, y)$. Déterminer une expression de $\varphi(x, y)$ sachant que $\varphi(1, 3) = 0$.

2 °) Montrer que $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{V}(x, y)\right) = 0$

TPSVP– >

Exercice 3 : *3 points*
Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes dans $\mathbb{R}^2$:

1 °)
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2 y + x\cos y.$$

2 °)
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 9f(x,y) = 0.$$

Exercice 4 : *5 points*

Soit $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ définie pour $n \geq 0$ et $S = \displaystyle\sum_{0}^{+\infty} u_n$.

1 °) Prouver que la série $\sum u_n$ converge par les deux méthodes suivantes :

a) en utilisant le critère de d'Alembert,

b) en admettant que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ et en utilisant le critère de comparaison.

2 °) On pose $a_n = \dfrac{n+1}{2^{n-1}}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n - a_{n+1}$.

b) En déduire que $\forall N \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n = 2 - \frac{N+2}{2^N}$.

c) En déduire la valeur de S.