Département GEII

Année 2017/2018
20 Octobre 2017

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé 2A N$^{\text{O}}$1 (2 Heures)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.
Le barème est sur 25 mais la note sera sur 20.

Exercice 1 : *14 points*

Soit $\nu_0 > 0$. On définit pour $t \in \mathbb{R}$ la fonction $g_{\nu_0}(t) = \delta(t) - \dfrac{\sin \pi\nu_0 t}{\pi t}$.
Soit $G_{\nu_0}(\nu)$ sa transformée de Fourier. On s'intéresse au système linéaire parfait qui à tout signal $x(t)$ associe le signal $y(t)$ défini par $y(t) = (x \star g_{\nu_0})(t)$.

1 °) Exprimer $G_{\nu_0}(\nu)$.

2 °) Dans cette question, $\nu_0 = 18$ et on considère le signal $x(t) = -2 + 3\cos(4\pi t) - \cos(16\pi t) + 2\sin(20\pi t)$.

a) Dessinez $G_{18}(\nu)$. Calculer $G_{18}(2), G_{18}(8), G_{18}(10)$

b) Quelle est la nature de $x(t)$? Prouver qu'il est périodique de période $\dfrac{1}{2}$. Citer les harmoniques $H_?$ contenus dans ce signal.

c) Calculer $X(\nu)$, transformée de Fourier de $x(t)$.

d) Calculer alors $Y(\nu)$ puis $y(t)$.

e) Comment se comporte le système vis à vis de $x(t)$?

f) Comment faut-il choisir ν_0 pour que le système conserve toutes les harmoniques du signal $x(t)$.

3 °) Dans cette question, $\nu_0 = 20$ et on considère l'entrée : $x(t) = e^{-t}U(t)$.

a) Exprimer la densité spectrale d'énergie $S_x(\nu)$ de $x(t)$ (on rappelle que $\omega = 2\pi\nu$).

b) Montrer que $Y(\nu) = 0$ si $|\nu| < 10$ et que $Y(\nu) = \dfrac{1}{1 + 2j\pi\nu}$ si $|\nu| \geq 10$

c) On admet que $\displaystyle\int_0^X \frac{1}{1 + 4\pi^2\nu^2} d\nu = \frac{1}{2\pi} \arctan(2\pi X)$

Calculer alors la valeur de l'énergie de $y(t)$ en utilisant l'égalité de Plancherel (valeur exacte puis valeur approchée à 10^{-5}).

Exercice 2 : *11 points*
On s'intéresse à une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par l'expression $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, où a, b et c sont des constantes.

1 °) Calculer les expressions des dérivées d'ordre 1 et d'ordre 2 de f à l'aide des paramètres a, b et c.

2 °) Montrer que le point $(0,0)$ est un point singulier pour f (on ne s'intéressera pas à la question de savoir si c'est le seul).

3 °) On suppose dans cette question que $b^2 - 4ac < 0$ et que $a > 0$. Montrer que l'on a un extremum local et préciser sa nature.

4 °) Dans cette question, on considère le cas $a = \dfrac{1}{2}, b = 0$ et $c = -3$. On définit le champ vectoriel $\vec{V}$ sur $\mathbb{R}^2$ par l'expression $\vec{V}(x,y) = xy\vec{i} + f(x,y)\vec{j}$.

Montrer que le champ vectoriel dérive d'un potentiel scalaire $\varphi(x,y)$, et déterminer une expression de $\varphi(x,y)$ sachant que $\varphi(1,1) = 0$

5 °) Dans cette question on ne fait plus d'hypothèses sur a, b et c, mais on suppose que l'on a les relations :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1.$$

Trouver les valeurs de a et de b.

6 °) Dans cette partie, on admettra la propriété (P) suivante :
Si f et g sont deux fonctions telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = g(y)$, alors f et g sont deux fonctions constantes et égales : $f(x) = g(y) = k$.
On suppose maintenant que g est une fonction quelconque deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant les équations :

$$(1) \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0,$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = 1.$$

a) Prouver à l'aide de l'équation (2) que, nécessairement, $g(x,y)$ est de la forme $g(x,y) = xy + \alpha(x) + \beta(y)$ où α et β sont deux fonctions dérivables.

b) En déduire à l'aide de l'équation (1) qu'il existe une constante k telle que $\alpha'(x) + x = -\beta'(y) - y = k$.

c) En déduire l'expression de $g(x,y)$ sachant que $g(0,0) = 0$ et $\overrightarrow{\text{grad g}}\,(0,0) = (0,0)$.