Département GEII

Année 2018/2019
12 Octobre 2018

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé 2A N°1 (2 Heures)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.
Le barème est sur 23 mais la note sera sur 20.

Exercice 1 : *7 points*
Soient les signaux $x_1(t) = \cos(2\pi t)$ et $x_2(t) = \Pi_2(t)$ où $\Pi_2(t)$ désigne la fonction porte de base 2 unités centrée en 0. Soit $x(t)$ défini par $x(t) = x_1(t).x_2(t)$.

- **a)** Donner la nature du signal $x(t)$.
- **b)** Représenter graphiquement le signal $x(t)$.
- **c)** Calculer $X(\nu)$ transformée de Fourier de $x(t)$.
- **d)** Calculer la valeur de E_x l'énergie de ce signal.
- **e)** Donner la valeur de $S_x(\nu)$ densité spectrale de $y(t)$.
- **f)** Donner la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} S_x(\nu)d\nu$.

Exercice 2 : *4 points*
1 °) Montrer qu'un système linéaire vérifiant $y(t) = (x \star h)(t)$ transmet une exponentielle $e^{j\omega_0 t}$ en exponentielle de même pulsation.
2 °) Si on note $H(\nu)$ la transformée de Fourier de $h(t)$, quelle condition faut il imposer à $H(\nu_0)$ pour que le système conserve l'amplitude ***réelle*** des signaux de la forme $Ae^{j\omega_0 t}$ avec A réel.

Exercice 3 : *6 points*
Soit $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y^2} + 2y^2 - 2x - 2y$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$.
1 °) Calculer les dérivées partielles d'ordre un et deux de $f(x, y)$.
2 °) Montrer que si (x_0, y_0) est un point singulier de f, alors on a $x_0 = y_0^2$. En déduire qu'il y a un seul point critique et donner ses coordonnées.
3 °) En déduire l'existence d'un minimum local.
4 °) **a)** Vérifier que :

$$f(x, y) + 1 = (\frac{x}{y} - y)^2 + (y - 1)^2.$$

b) En déduire que le minimum trouvé à la question précédente est en fait global.

Exercice 4 : *6 points*
1 °) Soit le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x, y) = \begin{pmatrix} ye^{-x} \\ xe^{-y} \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{V}$ est-il un champ de gradients ?

2 °) Soit le champ de vecteurs $\overrightarrow{W}(x,y) = \begin{pmatrix} f(y)e^{-x} \\ g(x)e^{-y} \end{pmatrix}$ où f et g sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\overrightarrow{W}$ dérive d'un potentiel $\varphi(x,y)$ et que : $\overrightarrow{W}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que $\overrightarrow{W}(x,y)$ dérive d'un potentiel si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f'(y)e^{y} = g'(x)e^{x}.$$

b) On admet que si $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\ h(x) = k(y) \Rightarrow h(x) = k(y) = C$ avec C constante. Déduire de cette propriété et de la question précédente que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \overrightarrow{W}(x,y) = \lambda \begin{pmatrix} e^{-x} - e^{-x-y} \\ e^{-y} - e^{-x-y} \end{pmatrix}$$

c) Dorénavant on choisit $\lambda = 1$. Trouver l'expression du potentiel $\varphi(x,y)$ dont dérive $\overrightarrow{W}(x,y)$ sachant que $\varphi(0,0) = 0$.