Département GEII

Année 2020/2021
14 Octobre 2020

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé 2A n$^{\text{O}}$1 (1h30)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable ni de montre connectée. Le barême de ce devoir est sur 22 mais il sera noté sur 20.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *13 points*
On considère le système linéaire (S) suivant :

$$y(t) = (h \star x)(t) \text{ avec } h(t) = \cos(\pi t)\frac{(\sin 5\pi t)}{\pi t}.$$

1 °) **a)** Rappeler l'expression de la transformée de Fourier de la fonction $t \to \cos(\pi t)$.

b) En déduire que $H(\nu)$ transformée de Fourier de $h(t)$ s'écrit : $\frac{1}{2}\left(\Pi_5(\nu - \frac{1}{2}) + \Pi_5(\nu + \frac{1}{2})\right)$.

c) Tracer les graphes des fonctions : $\nu \to \Pi_5(\nu - \frac{1}{2})$ et de $\nu \to \Pi_5(\nu + \frac{1}{2})$

d) En déduire le graphe de $\nu \to H(\nu)$.

2 °)

a) Tracer le graphe de $\nu \to S_h(\nu)$ où $S_h(\nu)$ désigne la densité spectrale d'énergie de $h(t)$.

b) On admet que $h(t)$ est à énergie finie. Calculez la valeur de cette énergie.

3 °) On considère $x(t) = 1 + \cos(5\pi t) + 2\cos(10\pi t) - \cos(20\pi t) + 3\sin(20\pi t)$.

a) Donner la nature de ce signal.

b) Trouver sa période et sa fréquence.

c) Calculer $X(\nu)$

d) Prouver que $Y(\nu) = \delta(\nu) + \frac{1}{4}\left(\delta(\nu - \frac{5}{2}) + \delta(\nu + \frac{5}{2})\right)$

e) En déduire $y(t)$.

f) Calculer la puissance moyenne de $x(t)$ et celle de $y(t)$.

TPSVP− >

Exercice 2 : *5 points + Bonus 2 points*

Soit $f(x,y) = x^2 + \dfrac{y^2}{4x} - y$ définie sur $]0;+\infty[\times\mathbb{R}$.

1 °) Calculer les dérivées partielles d'ordre un et deux de $f(x,y)$.

2 °) Montrer que le point $M_0(\frac{1}{2}, 1)$ est le seul point critique de $f(x,y)$.

3 °) Prouver que $f(x,y)$ admet un extrêmum en M_0. On précisera sa nature.

4 °) *Bonus 2 points*

a) Vérifier que $\forall (x,y) \in]0;+\infty[\times\mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{(y-2x)^2}{4x} + (x - \dfrac{1}{2})^2 - \dfrac{1}{4}$.

b) En déduire que l'extrêmum trouvé est global.

Exercice 3 : *4 points*

On considère les fonctions :

$$f(x,y) = x\ln(1+y) \text{ et } g(x,y) = ye^{2x+y}.$$

1 °) Donner le domaine de définition de g et celui de f.

2 °) Calculer les dérivées partielles d'ordre un de f et d'ordre deux de g.

$\longleftarrow\wr\wr\wr\wr\wr\wr\wr\wr\wr\wr\wr\wr\wr\wr\wr\wr\wr\wr\wr\wr\wr\wr\wr\wr\wr\wr\longrightarrow$