

D.S 1 MA 1

Exercice 1 4 points

Trouver la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

a) $z = -3j$ c) $z = -e^{-j\frac{\pi}{7}}$
b) $z = -1 + j$ d) $z = je^{j\frac{\pi}{5}}$

a) $z = 3e^{-j\frac{\pi}{2}}$ b) $z = \sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}$ c) $z = e^{6j\frac{\pi}{7}}$ d) $z = e^{j\frac{7\pi}{10}}$

Exercice 2 2 points

Résoudre l'équation d'inconnue z :

$$e^z = -3$$

$$z = \ln(3) + (2k + 1)j\pi \text{ pour } k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 3 4 points

On considère l'équation d'inconnue z : $z^2 - (1 + j)z + 2 - j = 0$.

1) a) Calculer Δ .

$$\Delta = -8 + 6j$$

b) Justifier que l'équation possède deux solutions complexes différentes (on ne cherchera pas à les calculer pour le moment)

Il y a deux solutions différentes car $\Delta \neq 0$.

2) Vérifier que $(1 + 3j)^2 = \Delta$.

On a en développant le carré : $(1 + 3j)^2 = 1 - 9 + 6j = -8 + 6j = \Delta$.

3) En déduire la forme algébrique des deux solutions de cette équation

La question précédente implique que l'on peut prendre $\delta = 1 + 3j$ donc les deux solutions sont $z_1 = -j$ et $z_2 = 1 + 2j$.

Exercice 4 5 points

Soit $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. On pose : $z = \frac{e^{j\alpha} + e^{3j\alpha}}{1 + e^{4j\alpha}}$.

1) Écrire $e^{j\alpha} + e^{3j\alpha}$ sous forme exponentielle.

On a $e^{j\alpha} + e^{3j\alpha} = 2\cos(\alpha)e^{2j\alpha}$. C'est bien une forme exponentielle car, vu que $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ on a $2\cos(\alpha) > 0$.

2) Même question pour $1 + e^{4j\alpha}$.

On a $1 + e^{4j\alpha} = 2\cos(2\alpha)e^{2j\alpha}$. C'est bien une forme exponentielle car, vu que $2\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ on a $2\cos(2\alpha) > 0$.

3) En déduire que z est un réel strictement positif.

On a d'après les questions précédentes $z = \frac{\cos(\alpha)}{\cos(2\alpha)} > 0$

Exercice 5 2 points

Montrer que le polynôme $X^3 + X + 1$ divise $X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$.

Une division euclidienne donne $X^5 - X^4 + 2X^3 + 1 = (X^3 + X + 1)(X^2 - X + 1)$ avec donc un reste nul.

Exercice 6 3 points

On considère le polynôme $P(X) = 2X^3 + 7X^2 - 14X + 5$.

En remarquant que 1 est racine évidente de $P(X)$, factoriser ce polynôme en produit de polynômes de degré 1.

Le fait que 1 soit racine évidente de $P(X)$ signifie qu'il est divisible par $X - 1$ ce qui donne par division euclidienne : $P(X) = 2X^3 + 7X^2 - 14X + 5 = (X - 1)(2X^2 + 9X - 5)$.

Le polynôme $2X^2 + 9X - 5$ admet deux racines réelles et se factorise en $2X^2 + 9X - 5 = 2(X + 5)\left(X - \frac{1}{2}\right) = (X + 5)(2X - 1)$ ce qui donne $P(X) = (X - 1)(X + 5)(2X - 1)$.