Département GEII

Année 2017/2018
Mardi 7 Novembre 2017

$\boxed{\text{MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé 1A (1,5 heure)CORRIGÉ}}$

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *6 points*

1 °) $\boxed{z = 3e^{-\frac{j\pi}{2}}}$

2 °) $z_2 = 4e^{-\frac{j\pi}{2}}e^{j} = \boxed{4e^{j\left(1-\frac{1\pi}{2}\right)}}$

3 °) On commence par écrire que $1+\sqrt{3}j = 2e^{\frac{j\pi}{3}}$ pour en déduire que $z_3 = \left(2e^{\frac{j\pi}{3}}\right)^5 = \boxed{2^5 e^{\frac{5j\pi}{3}}}$.

4 °) On utilise la méthode vue en cours :

$$e^{\frac{j\pi}{8}} + e^{3\frac{j\pi}{8}} = e^{2\frac{j\pi}{8}}\left(e^{-\frac{j\pi}{8}} + e^{\frac{j\pi}{8}}\right) = \boxed{2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{j\pi}{4}}}$$

5 °)
$z_5 = -1 = \boxed{e^{j\pi}}$

Exercice 2 : *6 points*

1 °) On a tout d'abord $Q(X) = X^3 + X^2 + X + 1 = X^2(X+1) + 1(X+1) = (X^2+1)(X+1)$. Ensuite, $X^2 + 1 = X^2 - j^2 = (X-j)(X+j)$. Donc on obtient

$$\boxed{Q(X) = (X+1)(X-j)(X+j)}$$

les polynômes intervenant dans cette factorisation étant irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ car de degré 1. Les racines de $Q(X)$ sont -1, j et $-j$.

2 °)
Si $P(X)$ admet une racine double $\alpha \in \mathbb{R}$, nécessairement $P'(\alpha) = 0$. Le calcul de $P'(X)$ aboutit à $P'(X) = 12Q(X)$, ce qui donne $Q(\alpha) = 0$, c'est à dire $\alpha = -1$ car -1 est la seule racine réelle de $Q(X)$.
On doit aussi avoir nécessairement $P(\alpha) = 0$, donc $P(-1) = 0$ c'est à dire $-7 + a = 0$ donc $a = 7$.
Réciproquement, si $a = 7$, $P(-1) = P'(-1) = 0$ et $P''(-1) = 24 \neq 0$ donc si $a = 7$, $P(X)$ admet une racine double. On a donc $\boxed{a = 7}$.

3 °) Puisque -1 est racine double de $P(X)$, $(X+1)^2$ divise $P(X)$. Une division euclidienne donne :

$$3X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 12X + 7 = (X+1)^2(3X^2 - 2X + 7).$$

Le polynôme $3X^2 - 2X + 7$ est du second degré à $\Delta = -80 < 0$ donc il est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
Le résultat cherché est donc $\boxed{P(X) = (X+1)^2(3X^2 - 2X + 7)}$.

Exercice 3 : *4 points*

1 °) On calcule tout d'abord

$$P'(X) = n(n+2)X^{n+1} - (n+2)(n+1)X^n + n + 2 = (n+2)\left(nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1\right)$$

$$P''(X) = (n+2)\left(n(n+1)X^n - (n+1)nX^{n-1}\right) = n(n+1)(n+2)\left(X^n - X^{n-1}\right)$$

$$P'''(X) = n(n+1)(n+2)\left(nX^{n-1} - (n-1)X^{n-2}\right).$$

On a donc $P(1) = n - (n+2) + (n+2) - n = 0$, $P'(1) = (n+2)\,(n - (n+1) + 1) = 0$, $P''(1) = n(n+1)(n+2)\,(1-1) = 0$ et $P'''(1) = n(n+1)(n+2)\,(n - (n-1)) = n(n+1)(n+2) \neq 0$. 1 est donc racine triple de $P(X)$.

2 °) On déduit de la question précédente que $(X-1)^3$ divise $P(X)$ pour $n = 3$. Par division euclidienne, on obtient :

$$3X^5 - 5X^4 + 5X - 3 = (X-1)^3(3X^2 + 4X + 3).$$

Le polynôme $3X^2 + 4X + 3$ est du second degré à $\Delta = -20 < 0$ donc il est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Le résultat cherché est donc

$$\boxed{P(X) = (X-1)^3(3X^2 + 4X + 3)}$$

Exercice 4 : *4 points*

1 °) $x(t)$ est une somme de deux sinusoïdes de même pulsation $\omega = 2$ (le fait qu'elles aient la même pulsation est nécessaire pour cet argument) : c'est donc une sinusoïde de pulsation ω . Sa période vaut $T = \frac{2\pi}{\omega}\boxed{= \pi}$, et sa fréquence $\boxed{\frac{1}{\pi}}$.

2 °)

Les amplitudes complexes s'ajoutent donc $\underline{A} = 1 + e^{j\frac{\pi}{3}} = 1 + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}$

3 °)

$|\underline{A}| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$

$\arg\underline{A} = \frac{\pi}{6}$.

On en déduit que $\boxed{\underline{A} = \sqrt{3}e^{\frac{j\pi}{6}}}$.

4 °) On sait que $A = |\underline{A}|$ et $\varphi = \arg\underline{A}$. On en déduit que $\boxed{x(t) = \sqrt{3}\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)}$.

Exercice 5 : *3 points*

1 °) Le discriminant vaut $\Delta = 4 - 4\alpha$. Les coefficients de cette équation étant réels, l'équation (E) admet (au moins) une solution réelle si et seulement si $\Delta \geq 0$, c'est à dire si et seulement si $4 - 4\alpha \geq 0$. On déduit la condition $\alpha \leq 1$.

2 °) a) On a donc $\Delta < 0$. Les solutions sont

$$z_1 = \frac{2 - j\sqrt{4\alpha - 4}}{2} = \frac{2 - 2j\sqrt{\alpha - 1}}{2} = \boxed{1 - j\sqrt{\alpha - 1}}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = \boxed{1 + j\sqrt{\alpha - 1}}$$

b) $|z_1|^2 = |z_2|^2 = 1^2 + \alpha - 1 = \alpha$. On en déduit que les solutions sont de module égal à 2 si et seulement si $\boxed{\alpha = 4}$.