$\boxed{\text{MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé 2A N}^{\text{O}}\text{1 (2 Heures)CORRIGÉ}}$

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 :

1 °)

En utilisant le formulaire et la linéarité de la transformée de Fourier on obtient

$$G_{\nu_0}(\nu) = 1 - \Pi_{\nu_0}(\nu).$$

2 °)

a) La fonction G_{18} vaut 1 à l'extérieur de l'intervalle $[-9, 9]$ et 0 sur cet intervalle. $G_{18}(2) = G_{18}(8) = 0$ et $G_{18}(10) = 1$

b) On reconnaît en l'expression de $x(t)$ un polynôme trigonométrique de pulsation $\omega = 4\pi$. On en déduit que $x(t)$ est périodique de période $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{2}}$, déterministe et à puissance moyenne finie. La valeur moyenne est -2, $H_1(t) = 3\cos(4\pi t)$, $H_4(t) = -\cos(16\pi t)$ et $H_5(t) = 2\sin(20\pi t)$. Les autre harmoniques sont nulles.

c)

$$X(\nu) = -2\delta(\nu) + \frac{3}{2}\left(\delta(\nu-2) + \delta(\nu+2)\right) - \frac{1}{2}\left(\delta(\nu-8) + \delta(\nu+8)\right) + \frac{1}{j}\left(\delta(\nu-10) - \delta(\nu+10)\right)$$

d)

$$Y(\nu) = G_{18}(\nu).X(\nu) = \left(1 - \Pi_{18}(\nu)\right).X(\nu)$$

Avant de se lancer dans un calcul compliqué, il vaut mieux remarquer avant que $1 - \Pi_{18}(\nu)$ est nul pour $|\nu| < 9$ et égal à 1 sinon. Ainsi, dans l'expression de $X(\nu)$, on ne garde que les Diracs centrés sur des valeurs de ν telles que $|\nu| \geq 9$.
On obtient :

$$\boxed{Y(\nu) = \frac{1}{j}\left(\delta(\nu-10) - \delta(\nu+10)\right).}$$

En prenant l'original, on obtient :

$$\boxed{y(t) = 2\sin(20\pi t).}$$

e) Le système se comporte comme un filtre passe-haut parfait de fréquence de coupure $\nu_0 = 9$.

f) Il faut choisir $\boxed{\nu_0 < 4}$.

3 °)

a) Le formulaire donne $X(\nu) = \dfrac{1}{1 + 2j\pi\nu}$. On a donc :

$$S_x(\nu) = |X(\nu)|^2 = \left|\frac{1}{1 + 2j\pi\nu}\right|^2 = \frac{1}{|1 + 2j\pi\nu|^2} \boxed{= \frac{1}{1 + 4\pi^2\nu^2}}.$$

b)

On a

$$Y(\nu) = G_{20}(\nu).X(\nu) = (1 - \Pi_{20}(\nu)).X(\nu) = (1 - \Pi_{20}(\nu))\frac{1}{1+2j\pi\nu}.$$

On en déduit donc que $Y(\nu) = 0$ si $|\nu| < 10$ et que $Y(\nu) = \dfrac{1}{1+2j\pi\nu}$ si $|\nu| \geq 10$.

c)

L'énergie totale de $y(t)$ vaut $E(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt$. Grâce au théorème de Plancherel, on a

$$E(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(\nu))|^2 d\nu = \int_{-\infty}^{-10} \left|\frac{1}{1+2j\pi\nu}\right|^2 d\nu + \int_{10}^{+\infty} \left|\frac{1}{1+2j\pi\nu}\right|^2 d\nu,$$

d'après le résultat de la question précédente.
Le calcul fait au 2)a) et la parité de la fonction $\nu \to \dfrac{1}{1+4\pi^2\nu^2}$ permettent de déduire :

$$E(y) = +2\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2\nu^2} d\nu.$$

Il reste à utiliser le calcul admis par l'énoncé. D'une part,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2\nu^2} d\nu = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\arctan(2\pi X) = \frac{1}{2\pi}.\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}.$$

D'autre part,

$$E(y) = +2\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2\nu^2} d\nu = 2\left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2\nu^2} d\nu - \int_0^{10} \frac{1}{1+4\pi^2\nu^2} d\nu\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}\arctan(20\pi)\right) = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan(20\pi)} \sim 0.00507.$$

Remarque : l'énergie de l'entrée $x(t)$ vaut $E(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu))|^2 d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2\nu^2} d\nu = \frac{1}{2}$.
Ainsi, notre filtre passe-haut ne garde que environ 1/100 de l'énergie du signal d'entrée.

Exercice 2 :

1 °)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 2ax + by, \ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = bx + 2cy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = 2a, \ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = 2c, \ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = b.$$

2 °) On remplace $(x;y)$ par $(0,0)$ dans les expressions de

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 2ax + by, \ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = bx + 2cy,$$

ce qui donne $\overrightarrow{\text{grad g}}\,(0;0) = (0;0)$. Le point $(0,0)$ est donc un point singulier.

3 °)

On calcule la quantité

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = b^2 - 2a.2c = b^2 - 4ac < 0.$$

Le critère vu en cours permet de dire que f admet un extremum local en $(0,0)$. De plus, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2a > 0$, donc cet extremum local est un minimum local.

Remarque : une mise sous forme canonique par rapport à x permet d'écrire :

$$f(x,y) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}y^2 \geq 0 \text{ si } b^2 - 4ac < 0 \text{ et } a > 0,$$

ce qui permet d'affirmer le caractère global de ce minimum. Ce point là n'était pas demandé par l'énoncé.

4 °)

On a $V(x,y) = V_1(x,y)\vec{i} + V_2(x,y)\vec{j}$, avec $V_1(x,y) = xy$ et $V_2(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - 3y^2$.

On a $\frac{\partial V_2}{\partial x} = x$ et $\frac{\partial V_1}{\partial y} = x$ donc les fonctions $\frac{\partial V_2}{\partial x}$ et $\frac{\partial V_1}{\partial y}$ sont égales : le champ vectoriel dérive d'un certain potentiel scalaire $\varphi(x;y)$.

On a $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = V_1(x,y) = xy$, donc en intégrant par rapport à x on obtient que $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y + a(y)$ pour une certaine fonction dérivable $a(y)$. En utilisant cette dernière expression, on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = V_2(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - 3y^2,$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{2}x^2 + a'(y) = \frac{1}{2}x^2 - 3y^2,$$

c'est à dire l'égalité $a'(y) = -3y^2$. En primitivant par rapport à y, cela donne $a(y) = -y^3 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Ainsi, on a $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y - y^3 + k$. La condition $\varphi(1;1) = 0$ donne $-\frac{1}{2} + k = 0$ soit $k = \frac{1}{2}$. On a finalement :

$$\boxed{\varphi(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y - y^3 + \frac{1}{2}}.$$

5 °)

Grâce aux calculs effectués dans la question 1), les équations donnent :

$$2ax + by + bx + 2cy = (2a + b)x + (b + 2c)y = 0 \;\; \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\boxed{b = 1}.$$

On remplace la valeur de b par 1 dans la première équation :

$$(2a + 1)x + (1 + 2c)y = 0 \;\; \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Cette égalité étant vraie quels que soient les réels x et y, on obtient que $\boxed{a = c = -\frac{1}{2}.}$

6 °)

a) La relation $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x; y) = 1$ donne en primitivant par rapport à y la relation

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x; y) = y + a(x),$$

où a est une fonction de la variable x.
En primitivant à nouveau par rapport à x cette fois, on obtient :

$$g(x, y) = xy + \alpha(x) + \beta(y),$$

où α est une primitive de la fonction a , et β une fonction dérivable de la variable y.

b)
A l'aide de l'expression trouvée ci-dessus, on obtient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \; \frac{\partial g}{\partial x}(x; y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x; y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \; y + \alpha'(x) + x + \beta'(y) = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \; \alpha'(x) + x = -y - \beta'(y).$$

La popriété (P) rappelée dans l'énoncé implique alors que les fonctions $\alpha'(x) + x$ et $-y - \beta'(y)$ sont constantes et égales. Soit k cette constante.

c) On part de la relation de la variable x : $\alpha'(x) + x = k$ qui donne en primitivant

$$\alpha(x) = -\frac{1}{2}x^2 + kx + C_1,$$

pour une certaine constante C_1. De même, on a :

$$\beta(y) = -\frac{1}{2}y^2 - ky + C_2,$$

pour une certaine constante C_2.
On arrive ainsi à l'expression :

$$g(x, y) = xy - \frac{1}{2}x^2 + kx + C_1 - \frac{1}{2}y^2 - ky + C_2 = xy - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + k(x - y) + C_1 + C_2.$$

La condition $g(0; 0) = 0$ implique $C_1 + C_2 = 0$. D'autre part, puisque

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x; y) = y - x + k, \;\; \frac{\partial g}{\partial y}(x; y) = x - y - k,$$

la condition $\overrightarrow{\text{grad g}}\,(0;0) = (0;0)$ implique $k = 0$.
On obtient ainsi :

$$\boxed{g(x,y) = xy - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)}.$$

Remarque : on retrouve l'expression trouvée dans la question 5)