Institut Universitaire de Technologie
Aix*Marseille Université

Département GEII

Année 2016/2017
14 Janvier 2017

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé 2A n°2 (2 Heures)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 :
On considère un système numérique discret bouclé dont :
(i) la chaîne directe est un système admettant comme fonction de transfert $H_d(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$.
(ii) la chaîne de retour est un système admettant comme fonction de transfert $H_r(z) = k \geq 0$.
On rappelle (voir cours d'automatique !) que la fonction de transfert du système bouclé est

$$H(z) = \frac{H_d(z)}{1 + H_r(z)H_d(z)} = \frac{H_d(z)}{1 + kH_d(z)}.$$

1 °) Dans cette question, on suppose que $H_r(z) = k = 0$ (boucle ouverte).
a) Etudier la stabilité du système
b) Calculer l'expression de la réponse impulsionnelle. Quel est le type de ce système ? Justifier.
c) Retrouver à l'aide du b) la caractère stable ou instable du système.

On suppose dorénavant que $k > 0$.

2 °) a) Vérifier que $H(z) = \dfrac{1}{z^2 - z + k}$

b) En remarquant que $H(z) = \dfrac{\frac{1}{z^2}}{1 - \frac{1}{z} + \frac{k}{z^2}}$, écrire l'équation aux différences associée à ce système ($x(n)$ et $y(n)$ désigneront respectivement l'entrée et la sortie).

3 °) On suppose $k > \dfrac{1}{4}$.
a) Vérifier que les pôles de $H(z)$ sont $\dfrac{1}{2} - j\sqrt{k - \dfrac{1}{4}}$ et $\dfrac{1}{2} + j\sqrt{k - \dfrac{1}{4}}$.
b) En déduire pour quelles valeurs de $k > \dfrac{1}{4}$ le système est stable.

4 °) On suppose $k = \dfrac{1}{4}$.
a) Etudier la stabilité du système
b) Soit $(y_{ind}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ la réponse indicielle (on rappelle qu'il s'agit de la sortie correspondant à l'entrée $x(n) = U(n)$). **On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{ind}(n)$ existe et est finie.**
(i) Calculer $Y_{ind}(z)$ la transformée en Z de $(y_{ind}(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) En déduire à l'aide du Théorème de la valeur finale la valeur de $\lim_{n\to+\infty} y_{ind}(n)$.

5 °) BONUS. On suppose $0 < k < \frac{1}{4}$. On peut vérifier directement (et on l'admettra) que les deux pôles de $H(z)$ sont réels et valent

$$z_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - k}, \;\; z_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - k}.$$

a) Montrer que : $\forall k \in]0; \frac{1}{4}[, \;\; 0 < \sqrt{\frac{1}{4} - k} < \frac{1}{2}$.

b) En déduire que $0 < z_1 < z_2 < 1$.

c) Le système est-il stable ? Justifier.

Exercice 2 :

On s'intéresse dans cet exercice à la suite $(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par la relation

$$x_{n+2} = \frac{5}{6}x_{n+1} - \frac{1}{6}x_n + 1,$$

ainsi que les conditions initiales $x_0 = x_1 = 0$.

1 °) Calculer $x_2, \; x_3$ et x_4.

2 °) On pose $U_n = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$

a) Donner $U_0, \; U_1$ et U_2.

b) Montrer que pour tout entier naturel n on a $U_{n+1} = AU_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3 °) a) Calculer l'expression du polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A.

b) Montrer, à partir de la question précédente, qu'il existe une matrice inversible $P \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

c) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ convient dans la question précédente.

4 °) a) Trouver un vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tel que $X = AX + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) En déduire à l'aide du 2)b) que pour tout entier naturel n on a : $U_{n+1} - X = A(U_n - X)$.

5 °) On pose $V_n = U_n - X$ où X est le vecteur colonne trouvé précédemment.

a) Montrer que $V_n = A^n V_0 = PD^n P^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) En déduire l'expression de x_n en fonction de n, puis $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

6 °) BONUS. Retrouver directement les résultats de la question 5)b) en utilisant la transformation en Z.