Département GEII

Année 2017/2018
24 Novembre 2017

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé 2A n$^{\text{o}}$2 (? Heures)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *7 points*

On considère la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, avec $\forall n \geq 1$, $u_n = \dfrac{2^n + n^2 + n}{n(n+1)2^n}$.

1 °) Prouver que $\forall n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

2 °) Prouver que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ convergent. Quelle est la nature de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$?

3 °) a) Prouver que

$$\forall k \geq 1, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^n}}$ (attention, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ est initialisée à $n = 1$).

d) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 2 : *2 points*

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Exercice 3 : *14 points*

• On considère un premier système discret (S_0) où à toute entrée causale $x(n)$ on associe la sortie $y(n)$ définie par

$$y(n) = x(n) - x(n-2).$$

1 °) a) Calculer la fonction de transfert $H(z)$ de ce système. Etudier la stabilité et donner le type du système.

b) Donner l'expression de la réponse indicielle de (S_0) et la représenter graphiquement.

On considère la suite périodique $(a(n))$ définie par $a(n) = 0$ si $n < 0$, $a(n) = 2$ si $n \in \mathbb{N}$ est pair et $a(n) = 1$ si $n \in \mathbb{N}$ est impair. On veut calculer sa transformée en Z qui n'est pas accessible directement par le formulaire.

2 °) On s'intéresse à l'entrée $x(n)$ avec $x(n) = a(n)$ et à $y(n)$ la sortie correspondante pour le système (S_0).

a) Représenter graphiquement les suites $a(n)$ et $a(n-2)$ pour $0 \leq n \leq 6$.
b) En déduire la représentation graphique de la sortie $y(n)$ pour $0 \leq n \leq 6$.
c) Exprimer alors $y(n)$ à l'aide de $\delta(n)$ et $\delta(n-1)$. En déduire une expression de $Y(z)$.
d) Prouver alors que

$$X(z) = \frac{z(2z+1)}{(z-1)(z+1)}.$$

e) En déduire enfin une expression de $x(n)$.

• On considère maintenant le système discret (S_1) où à toute entrée causale x on associe la sortie y définie par

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n).$$

3 °)
On s'intéresse à l'entrée $x(n)$ avec $x(n) = a(n)$ et à $y(n)$ la sortie correspondante pour le système (S_1) cette fois-ci.

a) On admet la décomposition en éléments simples de la fraction

$$\frac{z(2z+1)}{(z-1)(z+1)(z-\frac{1}{2})} = \frac{3}{(z-1)} + \frac{1/3}{(z+1)} - \frac{4/3}{z-\frac{1}{2}}.$$

En déduire l'expression de $y(n)$.
b) Montrer que $y(n)$ s'écrit $y(n) = y_0(n) + y_p(n)$ où :
$\lim\limits_{n \to +\infty} y_0(n) = 0$,
$\forall n \geq 2,\ y_p(n) = y_p(n-2)$.