Département GEII

Année 2018/2019
28 Novembre 2018

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé 2A n°2 (2 Heures)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *6 points*

1 °) Donner la nature et si elle converge la somme S_1 de la série : $\displaystyle\sum_0^{+\infty} \frac{5}{3^n}$

2 °) Donner la nature et si elle converge la somme S_2 à 10^{-2} près de la série : $\displaystyle\sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$

3 °) Donner la nature et si elle converge la somme S_3 de la série : $\displaystyle\sum_2^{+\infty} n \sin\left(\frac{2}{n}\right) \ln(1-1/n)$

Exercice 2 : *6 points*
Soit $u_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n))$ pour $n \geq 2$.

1 °) a) Montrer que : $u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$

b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$.

2 °) a) Trouver l'équivalent de $\dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln n}$ en l'infini.

b) Vérifier que $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)$.

c) Déduire des deux questions précédentes que $u_n \sim \dfrac{1}{n \ln n}$ en $+\infty$.

d) Que peut on dire alors de la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n}$?

Exercice 3 : *5 points*
On considère un système linéaire discret (S) qui à toute entrée causale $x(n)$ associe la sortie $y(n)$ définie par

$$y(n) = (h \star x)(n).$$

Soit y_{ind} la réponse indicielle (i.e. la réponse à l'entrée $x(n) = \mathcal{U}(n)$).

1 °) Exprimer $Y_{ind}(z)$ en fonction de $H(z)$ et de z.

2 °)

a) Calculer la transformée en Z du signal $y_{ind}(n) - y_{ind}(n-1)$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{Z},\ y_{ind}(n) - y_{ind}(n-1) = h(n)$

c) On suppose dans cette question uniquement que le système (S) est RIF. Déduire des questions précédentes que la suite $y_{ind}(n)$ est constante à partir d'un certain indice.

3 °) (bonus)

Dans cette question on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{ind}(n) = l \in \mathbb{R}$. Montrer que (S) est stable.

Exercice 4 : *6 points*

On considère un système linéaire discret (S) qui à toute entrée causale $x(n)$ associe la sortie $y(n)$ définie par

$$y(n) = y(n-1) + 2[x(n) + x(n-1)]$$

1 °) Etudier la récursivité, la stabilité et le type de ce système.

2 °) Calculer la réponse impulsionnelle et retrouver le résultat de stabilité ci-dessus.

3 °) On considère maintenant le système linéaire discret (S_a) défini par

$$y(n) = ay(n-1) + 2[x(n) + ax(n-1)]$$

avec a réel.

a) Calculer la fonction de transfert $H_a(z)$.

b) Pour quelles valeurs de a le système (S_a) est-il stable ?