Institut Universitaire de Technologie
Aix*Marseille Université

Département GEII

Année 2019/2020
29 Novembre 2019

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé 2A n°2 (1h30)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *6 points*

1 °) Donner la nature et si elle converge la somme S_1 de la série : $\sum_{0}^{+\infty} (\sin 3)\, e^{-3n}$

2 °) Donner la nature de la série : $\sum_{1}^{+\infty} \dfrac{n^7 - n + 3}{2n^8 + n^2 + n + 1}$

3 °) Donner la nature de la série : $\sum_{2}^{+\infty} (-1)^n \left(\dfrac{n}{\ln n}\right)$

4 °) Donner la nature de la série : $\sum_{1}^{+\infty} (-1)^n \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$

5 °) Donner la nature de la série : $\sum_{0}^{+\infty} \left(\dfrac{n!}{e^{100n}}\right)$

Exercice 2 : *3 points*

1 °) Résoudre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0,$$

pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2 °) Trouver l'expression de $f(x, y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sachant que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0, f(0, y) = 1 \text{ et } f(1, y) = y.$$

Exercice 3 : *4 points*

1 °) Montrer que le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x, y) = (2xy - y^2 + y)\overrightarrow{i} + (-2xy + x^2 + x)\overrightarrow{j}$ dérive d'unj potentiel scalaire $\varphi(x, y)$.

2 °) Trouver l'expression de $\varphi(x, y)$ sachant que $\varphi(0, 0) = 0$.

Exercice 4 : *7 points*
On considère un système linéaire discret (S) qui à toute entrée causale $x(n)$ associe la sortie $y(n)$ définie par $y(n) = (h \star x)(n)$ et on suppose que la réponse **indicielle** est égale à

$$y_{ind}(n) = \left(1 - \frac{2}{3^n}\right)\mathcal{U}(n).$$

Enfin on note $H(z) = TZ(h)(z)$.

1 °) Montrer que $Y_{ind}(z) = \dfrac{-z^2 + \frac{5}{3}z}{(z-1)(z-\frac{1}{3})}$.

2 °) Montrer que $Y_{ind}(z) = \dfrac{zH(z)}{(z-1)}$.

3 °) En déduire que $H(z) = \dfrac{-z + \frac{5}{3}}{z - \frac{1}{3}}$.

4 °) a) Etudier la stabilité du système (S).

b) Trouver l'expression de $h(n)$. Donner la nature et le type de ce système.