Département GEII

Année 2019/2020
29 Novembre 2019

MATHÉMATIQUES. Corrigé du devoir surveillé 2A n°2 (1h30)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *6 points*

1 °) Donner la nature et si elle converge la somme S_1 de la série : $\sum_0^{+\infty} (\sin 3)\, e^{-3n}$

C'est une série géométrique de raison e^{-3} qui converge car $0 < e^{-3} < 1$ et
$\sum_0^{+\infty} (\sin 3)\, e^{-3n} = (\sin 3) \sum_0^{+\infty} \left(e^{-3}\right)^n = (\sin 3)\, \frac{1}{1-e^{-3}} = S_1.$

---

2 °) Donner la nature de la série : $\sum_1^{+\infty} \frac{n^7-n+3}{2n^8+n^2+n+1}$

On a $0 < \frac{n^7-n+3}{2n^8+n^2+n+1} \sim \frac{n^7}{2n^8} = \frac{1}{2n}$. Or $\frac{1}{2n}$ est le terme général d'une série divergente (Riemann) donc par le critère d'équivalence, notre série diverge.

---

3 °) Donner la nature de la série : $\sum_2^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{\ln n}\right)$

Le terme général ne tend pas vers 0 donc elle diverge.

---

4 °) Donner la nature de la série : $\sum_1^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{\ln n}{n}\right)$

C'est une série alternée qui vérifie le CSSA donc elle converge (détailler la décroissance)

---

5 °) Donner la nature de la série : $\sum_0^{+\infty} \left(\frac{n!}{e^{100n}}\right)$

Appliquons le critère de d'Alembert : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n!}{e^{100n}} \frac{e^{100n+100}}{(n+1)!}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{e^{100}}{n+1}\right) = 0$ donc elle converge.

Exercice 2 : *3 points*

1 °) Résoudre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0,$$

pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

C'est du cours : $f(x,y) = xg(y) + h(y)$ avec g et h fonctions quelconques.

---

2 °) Trouver l'expression de $f(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sachant que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0, f(0,y) = 1 \text{ et } f(1,y) = y.$$

$f(0,y) = 1 \Rightarrow h(y) = 1$ et $f(1,y) = y \Rightarrow g(y) = y - 1$. Donc $f(x,y) = x(y-1) + 1$.

Exercice 3 : *4 points*

1 °) Montrer que le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y) = (2xy - y^2 + y)\overrightarrow{i} + (-2xy + x^2 + x)\overrightarrow{j}$ dérive d'un potentiel scalaire $\varphi(x,y)$.

On a $\dfrac{\partial(2xy - y^2 + y)}{\partial y} = 2x - 2y + 1 = \dfrac{\partial(-2xy + x^2 + x)}{\partial x}$.

---

2 °) Trouver l'expression de $\varphi(x,y)$ sachant que $\varphi(0,0) = 0$.

On intègre par rapport à x l'edp : $\dfrac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = 2xy - y^2 + y$ par exemple et on obtient :
$\varphi(x,y) = x^2 y - xy^2 + yx + h(y)$ puis on dérive par rapport à y et on compare :
$\dfrac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = x^2 - 2xy + x + h'(y) = -2xy + x^2 + x$. D'où $h'(y) = 0$ et $h(y) = k$ constante 'pure'.
Donc $\varphi(x,y) = x^2 y - xy^2 + yx + k$. Comme $\varphi(0,0) = 0$, on en déduit que $k = 0$ et donc $\varphi(x,y) = x^2 y - xy^2 + yx$.

Exercice 4 : *7 points*

On considère un système linéaire discret (S) qui à toute entrée causale $x(n)$ associe la sortie $y(n)$ définie par $y(n) = (h \star x)(n)$ et on suppose que la réponse **indicielle** est égale à

$$y_{ind}(n) = \left(1 - \frac{2}{3^n}\right)\mathcal{U}(n).$$

Enfin on note $H(z) = TZ(h)(z)$.

1 °) Montrer que $Y_{ind}(z) = \dfrac{-z^2 + \frac{5}{3}z}{(z-1)(z-\frac{1}{3})}$.

D'après le formulaire : $Y_{ind}(z) = \dfrac{z}{z-1} - 2\dfrac{z}{z - 1/3} = \dfrac{-z^2 + \frac{5}{3}z}{(z-1)(z-\frac{1}{3})}$.

---

2 °) Montrer que $Y_{ind}(z) = \dfrac{zH(z)}{(z-1)}$.

On a $y_{ind}(n) = (h \star \mathcal{U})(n)$ et donc $Y_{ind}(z) = H(z)\dfrac{z}{z-1}$.

---

3 °) En déduire que $H(z) = \dfrac{-z + \frac{5}{3}}{z - \frac{1}{3}}$.

Calcul immédiat car de $Y_{ind}(z) = H(z)\dfrac{z}{z-1}$ et de $Y_{ind}(z) = \dfrac{-z^2 + \frac{5}{3}z}{(z-1)(z-\frac{1}{3})}$ on déduit que $H(z) = \dfrac{-z^2 + \frac{5}{3}z}{(z-1)(z-\frac{1}{3})} \times \dfrac{z-1}{z} = \dfrac{-z+\frac{5}{3}}{z-\frac{1}{3}}$.

4 °) a) Etudier la stabilité du système (S).

$H(z)$ a pour seul pôle $1/3$ dont le module vérifie $|1/3| < 1$ donc le système est stable.

b) Trouver l'expression de $h(n)$. Donner la nature et le type de ce système.

$h(n) = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \mathcal{U}(n) + \dfrac{5}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} \mathcal{U}(n-1)$.

Le système est récursif et RII car clairement $h(n)$ n'est pas à support borné.