Institut Universitaire de Technologie
Aix*Marseille Université

Département GEII

Année 2020/2021
25 Novembre 2020

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé 2A n°2 (1h30)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *4 points + 1 point Bonus*
On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(E_a)\quad 10\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 5a\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + a(a-3)f(x,y) = 5(a-5)y\cos(2x).$$

1 °) Résoudre l'équation (E_5).
2 °) Résoudre l'équation (E_0).
3 °) Bonus :
Pour $a \in \mathbb{R} - \{0,5\}$ proposer une méthode de résolution de (E_a) en vous inspirant du cours sur les EDO de 1A (ne pas essayer de la résoudre).

Exercice 2 : *5 points*
Soit le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y) = (-2ye^{-2x} + \varphi(y))\overrightarrow{i} + (e^{-2x} - 3x\sin(3y))\overrightarrow{j}$ où $\varphi(y)$ désigne une fonction à déterminer dans la suite.
1 °) Trouver les fonctions $\varphi(y)$ telles que $\overrightarrow{V}(x,y)$ soit un champ de gradients.
2 °) On considère dorénavant le champ de vecteurs $\overrightarrow{W}(x,y) = (-2ye^{-2x} + \cos(3y))\overrightarrow{i} + (e^{-2x} - 3x\sin(3y))\overrightarrow{j}$
a) Vérifier que $\overrightarrow{W}(x,y)$ est bien un champ de gradients.
b) Trouver les potentiels associés notés $f(x,y)$.
c) Déterminer celui qui vérifie : $f(0,0) = 1$.

Exercice 3 : *11 points + 1 point Bonus*
On considère un système linéaire discret (S_1) qui à toute entrée causale $x(n)$ associe la sortie $y_1(n)$ définie par $y_1(n) = (h_1 \star x)(n)$ et :
$h_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathcal{U}(n) - a\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \mathcal{U}(n-1)$, avec a paramètre réel.
Puis on définit un autre système linéaire discret (S_2) qui à toute entrée causale $x(n)$ associe la sortie $y_2(n)$ définie par
$y_2(n) = 2x(n-1) - 8x(n-3) + \frac{4}{3}y_2(n-1) - \frac{1}{3}y_2(n-2)$.

1 °) Etudier la stabilité et le type du système (S_1) (on pourra distinguer le cas $a = \frac{1}{2}$ pour le type).
2 °) Etudier la nature, la stabilité et le type du système (S_2).

3 °) On considère le système linéaire discret (S_3) qui consiste en la succession des systèmes (S_1) et (S_2) :

$$x(n) \longrightarrow y_1(n) = (h_1 \star x)(n) \longrightarrow y_2(n) = (h_2 \star y_1)(n)$$

a) Prouver que l'on peut traduire le système (S_3) par

$$x(n) \longrightarrow y(n) = (h_3 \star x)(n) \text{ avec } H_3(z) = H_1(z).H_2(z).$$

b) On donne $H_3(z) = \dfrac{6(z-2)(z+2)}{z(z-1)(3z-1)}.\dfrac{z-a}{z-\frac{1}{2}}$. Pour quelle valeur de a peut on rendre le système (S_3) stable ?

Bonus : Quelle remarque en termes de stabilité peut on faire sur l'ensemble des 3 systèmes ?

c) Donner la nature et le type du système (S_3) pour cette valeur de a.