Département GEII[1] Année 2020/2021

25 Novembre 2020

MATHÉMATIQUES. Corrigé du Devoir surveillé 2A n$^{\text{o}}$2

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *4 points + 1 point Bonus*

On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(E_a)\ \ 10\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 5a\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + a(a-3)f(x,y) = 5(a-5)y\cos(2x).$$

1 °) Résoudre l'équation (E_5).

(E_5) s'écrit : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 2,5\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + f(x,y) = 0$. On reconnait une EDO déguisée par rapport à la variable x.

On résout :$f''(x) - 2,5f'(x) + f(x) = 0$ et on obtient (revoir le Cours 1A) puisque $\Delta = 9/4 > 0$: $f(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{\frac{1}{2}x}$. D'où d'après le cours 2A on déduit :

$f(x,y) = \lambda(y)e^{2x} + \mu(y)e^{\frac{1}{2}x}$.

---

2 °) Résoudre l'équation (E_0).

(E_0) s'écrit : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2,5y\cos(2x)$. On reconnait une EDP basique et on intègre deux fois successivement par rapport à x d'où :

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -1,25y\sin(2x) + k(y)$ et $f(x,y) = 0,625y\cos 2x + xk(y) + h(y)$, avec k et h fonctions quelconques.

---

3 °) Bonus :

Pour $a \in \mathbb{R} - \{0,5\}$ proposer une méthode de résolution de (E_a) en vous inspirant du cours sur les EDO de 1A (ne pas essayer de la résoudre).

On pense à se ramener à une EDO par rapport à x comme dans 1$^{\text{O}}$) mais à cause du second membre non nul, on utilise le théorème de structure en écrivant $f(x)$ = [Solutions de l'équation homogène :(E_a) $10\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 5a\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + a(a-3)f(x,y) = 5(a-5)y\cos(2x)$] + [une solution particulière de l'équation complète : (E_a) $10\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 5a\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + a(a-3)f(x,y) = 5(a-5)y\cos(2x)$]. On cherchera cette solution particulière sous la forme : $A\cos(2x) + B\sin(2x)$. On termine en remplaçant toutes les constantes par des fonctions de y pour obtenir les $f(x,y)$ solutions de (E_a) pour $a \in \mathbb{R} - \{0,5\}$.

Exercice 2 : *5 points*

Soit le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y) = (-2ye^{-2x} + \varphi(y))\overrightarrow{i} + (e^{-2x} - 3x\sin(3y))\overrightarrow{j}$ où $\varphi(y)$ désigne une fonction à déterminer dans la suite.

1 °) Trouver les fonctions $\varphi(y)$ telles que $\overrightarrow{V}(x,y)$ soit un champ de gradients.

Il faut que $\frac{\partial(-2ye^{-2x} + \varphi(y))}{\partial y} = \frac{\partial(e^{-2x} - 3x\sin(3y))}{\partial x}$ soit $\varphi'(y) = -3\sin(3y)$ et donc :

$\varphi(y) = \cos(3y) + k$.

1. M. Cristofol, E. Jalade, 29/11/2020,

2 °) On considère dorénavant le champ de vecteurs $\overrightarrow{W}(x,y) = (-2ye^{-2x} + \cos(3y))\overrightarrow{i} + (e^{-2x} - 3x\sin(3y))\overrightarrow{j}$

a) Vérifier que $\overrightarrow{W}(x,y)$ est bien un champ de gradients.

Immédiat.

b) Trouver les potentiels associés notés $f(x,y)$.

On résout le système : $\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & = -2ye^{-2x} + \cos(3y) \ (1) \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} & = e^{-2x} - 3x\sin(3y) \ (2). \end{cases}$

On intègre (1) par rapport à x ce qui donne $f(x,y) = ye^{-2x} + x\cos(3y) + k(y)$ (3), puis on dérive (3) par rapport à y ce qui donne : $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^{-2x} - 3x\sin(3y) + k'(y)$ (4), et on identifie (4) avec (2) et on obtient : $k'(y) = 0$ et donc $f(x,y) = ye^{-2x} + x\cos(3y) + C$ avec C constante pure.

c) Déterminer celui qui vérifie : $f(0,0) = 1$.

$f(0,0) = C = 1$ d'où l'unique solution est $f(x,y) = ye^{-2x} + x\cos(3y) + 1$.

Exercice 3 : *11 points + 1 point Bonus*

On considère un système linéaire discret (S_1) qui à toute entrée causale $x(n)$ associe la sortie $y_1(n)$ définie par $y_1(n) = (h_1 \star x)(n)$ et :

$h_1(n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \mathcal{U}(n) - a\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \mathcal{U}(n-1)$, avec a paramètre réel.

Puis on définit un autre système linéaire discret (S_2) qui à toute entrée causale $x(n)$ associe la sortie $y_2(n)$ définie par

$y_2(n) = 2x(n-1) - 8x(n-3) + \dfrac{4}{3}y_2(n-1) - \dfrac{1}{3}y_2(n-2)$.

1 °) Etudier la stabilité et le type du système (S_1) (on pourra distinguer le cas $a = \dfrac{1}{2}$ pour le type).

$\lim_{n\to+\infty} h_1(n) = 0$ donc système stable.

Si $a = \dfrac{1}{2}$ alors $h_1(n) = \delta(n)$ donc système RIF et si $a \neq \dfrac{1}{2}$ système RII car $h(n)$ n'est pas une somme finie de Diracs.

2 °) Etudier la nature, la stabilité et le type du système (S_2).

Il est récursif et on a $H(z) = \dfrac{6(z^2-4)}{z(3z^2-4z+1)} = \dfrac{6(z-2)(z+2)}{z(z-1)(3z-1))}$ donc instable (car 1 est pôle) et donc RII.

3 °) On considère le système linéaire discret (S_3) qui consiste en la succession des systèmes (S_1) et (S_2) :

$$x(n) \longrightarrow y_1(n) = (h_1 \star x)(n) \longrightarrow y_2(n) = (h_2 \star y_1)(n)$$

a) Prouver que l'on peut traduire le système (S_3) par

$$x(n) \longrightarrow y(n) = (h_3 \star x)(n) \text{ avec } H_3(z) = H_1(z).H_2(z).$$

On a $y_2(n) = (h_2 \star y_1)(n) = (h_2 \star (h_1 \star x))(n) = [(h_2 \star h_1) \star x](n)$, d'où $h_3(n) = (h_2 \star h_1)(n)$ et donc $H_3(z) = H_1(z).H_2(z)$. On utilise ici en déplacant les parenthèses, une propriété du produit de convolution qui se nomme l'associativité.

b) On donne $H_3(z) = \dfrac{6(z-2)(z+2)}{z(z-1)(3z-1)} \cdot \dfrac{z-a}{z-\frac{1}{2}}$. Pour quelle valeur de a peut on rendre le système (S_3) stable ?

Il faut poser $a = 1$.

Bonus : Quelle remarque en termes de stabilité peut on faire sur l'ensemble des 3 systèmes ?

La composée d'un système stable (S_1) avec un système instable (S_2) peut en "jouant "sur le paramètre a devenir un système stable.

c) Donner la nature et le type du système (S_3) pour cette valeur de a.

Si $a = 1$ on a $H_3(z) = \dfrac{6(z-2)(z+2)}{z(z-\frac{1}{2})(3z-1)}$. Donc système RII (après un peu de travail et car on peut noter qu'il y a d'autres pôles que 0 dans $H(z)$) et donc récursif.