Département GEII

Année 2017/2018
24 Novembre 2017

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé 2A n$^{\text{o}}$2 CORRIGÉ(1H30 Heures)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 :

1 °)

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{2^n + n^2 + n}{n(n+1)2^n} = \frac{2^n + n(n+1)}{n(n+1)2^n} = \frac{2^n}{n(n+1)2^n} + \frac{n(n+1)}{n(n+1)2^n} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}.$$

2 °)

La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in]-1;1[$, elle est donc convergente.

<u>Attention</u>, on ne parle que de terme general equivalent à un autre et **<u>jamais</u>** on ne parle de série équivalente a une autre !!!!

$\dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2} > 0$, donc par le critère d'équivalence et le critère de Riemann, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

On en déduit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge comme somme de deux séries convergentes.

3 °) a)

En mettant au même dénominateur, on a :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

b) Par la question précédente, par la méthode des sommes télescopiques on a $\forall N > 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n}$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

En faisant $N \to +\infty$, on obtient $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1}$.

c) En factorisant la série convergente par $\dfrac{1}{2}$ on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}}{2^n} = \frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}}{2^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \boxed{1}.$$

<u>Attention</u> la série ne commence pas par l'indice 0 !!!

d)

D'après la question 1), $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}}{2^n} = 1 + 1 = \boxed{2}$.

Exercice 2 :
On pose $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. La suite $\left(1+\frac{1}{n}\right)_{n\geq 2}$ est positive, décroissante et tend vers 1, donc par composition avec la fonction ln qui est croissante et continue, la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et tend vers $\ln(1) = 0$ (on peut aussi étudier la dérivée de la fonction$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ et prouver qu'elle est négative).
Attention, il ne faut pas parler d'équivalent ici car les séries ne sont pas à termes de signe constant ! ! !
Le critère spécial de convergence des séries alternées permet donc d'affirmer que la suite $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ converge.

Exercice 3 :
1 °) a)
On part de la relation $y(n) = x(n) - x(n-2)$. Par le calcul de la TZ on obtient :

$$Y(z) = X(z) - \frac{X(z)}{z^2} = \left(1-\frac{1}{z^2}\right)X(z),$$

d'où l'on tire :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - \frac{1}{z^2} = \boxed{\frac{z^2-1}{z^2}}.$$

Le système étant non récursif on peut conclure directement qu'il est stable et RIF. On peut aussi dire que 0 est le seul pôle de $H(z)$ (donc système stable) et calculer facilement la réponse impulsionnelle qui est $h(n) = \delta(n) - \delta(n-2)$ (donc système RIF).
b)
On remplace $x(n)$ par $U(n)$ pour obtenir que $\boxed{y(n) = U(n) - U(n-2)}$.
Remarque : on peut aussi écrire $y(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$. **Attention** il s'agit bien de la réponse indicielle et non impulsionnelle ! ! !

2 °) **Attention** ne pas relier les points pour les tracés.
a)
b)
c) On remarque que $y(n) = 2\delta(n) + \delta(n-1)$. On déduit que $Y(z) = 2 + \frac{1}{z} = \boxed{\frac{2z+1}{z}}$.
d)
On utilise la relation $Y(z) = H(z)X(z)$ d'où l'on déduit que

$$X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{\frac{2z+1}{z}}{\frac{z^2-1}{z^2}} = \frac{2z+1}{z}.\frac{z^2}{z^2-1} = \frac{z(2z+1)}{z^2-1} = \frac{z(2z+1)}{(z-1)(z+1)}$$

e)
On procède à la décomposition en éléments simples de $\frac{2z+1}{(z-1)(z+1)}$ qui donne par les méthodes habituelles :

$$\frac{2z+1}{(z-1)(z+1)} = \frac{\frac{3}{2}}{z-1} + \frac{\frac{1}{2}}{z+1}.$$

On en déduit que

$$X(z) = \frac{z(2z+1)}{(z-1)(z+1)} = \frac{\frac{3}{2}z}{z-1} + \frac{\frac{1}{2}z}{z+1}.$$

Le formulaire donne alors :

$$x(n) = \frac{3}{2}U(n) + \frac{1}{2}(-1)^n U(n) = \boxed{\frac{3+(-1)^n}{2}U(n)}$$

3 °)

a) **Attention** l'énoncé ne dit pas que la fraction correspond à $Y(z)$ et ce n'est pas $Y(z)$! ! !

On commence tout d'abord par trouver la fonction de transfert de (S_1).

De la relation $y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n)$ on déduit par la transformation en Z que :

$$Y(z) - \frac{Y(z)}{2z} = X(z) \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2z}\right)Y(z) = X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} = \frac{2z}{2z-1}.$$

Sachant que pour l'entrée $x(n) = a(n)$ on a $X(z) = \frac{z(2z+1)}{(z-1)(z+1)}$ par la question 2)d), on a :

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{2z}{2z-1}.\frac{z(2z+1)}{(z-1)(z+1)} = \frac{2z^2(2z+1)}{(z-1)(z+1)(2z-1)} = \frac{z^2(2z+1)}{(z-1)(z+1)(z-\frac{1}{2})}.$$

De la décomposition en éléments simples donnée dans l'énoncé, on déduit que :

$$Y(z) = z\left(\frac{3}{z-1} + \frac{\frac{1}{3}}{z+1} - \frac{\frac{4}{3}}{z-\frac{1}{2}}\right) = \frac{3z}{z-1} + \frac{\frac{1}{3}z}{z+1} - \frac{\frac{4}{3}z}{z-\frac{1}{2}}.$$

Le formulaire permet alors d'en trouver l'original :

$$\boxed{y(n) = \left(3 + \frac{1}{3}(-1)^n - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)U(n)}.$$

b)

On pose $y_p(n) = \left(3 + \frac{1}{3}(-1)^n\right)U(n)$ et $y_0(n) = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n U(n)$.

On a d'une part $\lim\limits_{n\to+\infty} y_0(n) = 0$, car $0 \leq \frac{1}{2} < 1$.

D'autre part, $(y_p(n))_{n\geq 0} = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \frac{8}{3}, ...\right)$ est bien périodique de période 2.

Remarque : la suite $(y_p(n))$ correspond à un pseudo-régime transitoire et la suite $(y_p(n))$ correspond à un pseudo-régime permanent périodique : on peut donc dire que la sortie correspondant à l'entrée périodique $(x_n(n))$ est asymptotiquement périodique. On montrerait de façon analogue que la sortie par (S_1) d'une entrée périodique quelconque est aussi asymptotiquement périodique. Ce phénomène n'est pas spécifique à (S_1) mais est une conséquence de sa stabilité.