MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé 2A n°2 CORRIGÉ (2 Heures)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : 6 points

Attention, on ne parle que de terme général équivalent à un autre et **jamais** on ne parle de série équivalente à une autre!!!!

1 °) On la réécrit : $5 \sum_0^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$. C'est donc une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et $-1 < \frac{1}{3} < 1$

donc elle converge. Sa somme S_1 est égale à : $S_1 = 5 \frac{1}{1 - 1/3} = 15/2$.

2 °)

Il s'agit d'une série alternée (**Attention**, l'exposant du (-1) peut être n ou $n - 1$ ou $n + 1$ ou $\dots$, ce qui est important c'est qu'il y ait changement de signe à chaque incrémentation de n). On va naturellement essayer d'utiliser le CSSA, il faut donc prouver :

$\frac{1}{n^3} \rightarrow 0$ ce qui est clair et

$\frac{1}{n^3}$ décroît et pour cela on peut dire que : $n + 1 > n \rightarrow (n + 1)^3 > n^3 \rightarrow \frac{1}{(n + 1)^3} < \frac{1}{n^3}$.

Donc le CSSA s'applique et elle converge. De plus on sait estimer l'erreur par la formule : $|S - S_n| \leq u_{n+1}$ ce qui donne ici que l'on cherche n tel que $|S - S_n| \leq 0,01$ ce qui est garanti par $u_{n+1} \leq 0,01$

soit $\frac{1}{(n + 1)^3} \leq 0,01$ soit $n = 4$ et donc on a la somme S qui vaut $S_4 = 1 - 1/8 + 1/27 - 1/64 = 0,896$.

3 °) Donner la nature et si elle converge la somme S_3 de la série : $\sum_2^{+\infty} n \sin\left(\frac{2}{n}\right) \ln(1 - 1/n)$ La

série est à termes négatifs pour n assez grand. On va utiliser le critère de l'équivalent :

$\sin \frac{2}{n} \sim \frac{2}{n}$ en $+\infty$ et $\ln(1 - 1/n) \sim -1/n$ en $+\infty$ d'où :

$$n \sin\left(\frac{2}{n}\right) \ln(1 - 1/n) \sim -2/n \text{ en } +\infty$$

qui est le terme général d'une série de Riemann divergente donc par le critère de l'équivalent la série diverge.

Attention, on n'utilise le critère de l'équivalent qu'avec des séries à signe constant, personne ne l'a rappelé!!!!

Exercice 2 : 6 points

Soit $u_n = \ln(\ln(n + 1)) - \ln(\ln n)$ pour $n \geq 2$.

1 °) a) On a affaire à une somme télescopique ou en cascades et seuls subsistent après simplifications le premier et le dernier terme : $u_2 + u_3 + \dots + u_n = \ln(\ln(n + 1)) - \ln(\ln 2)$

b)

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\ln(n+1)) = +\infty$, on en déduit que $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

2 °) a)

On a $\ln(1 + 1/n) \sim 1/n$ en $+\infty$ d'où $\frac{\ln(1 + 1/n)}{\ln n} \sim 1/(n \ln(n))$ en l'infini.

b)

$$u_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) = \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right) = \ln\left(\frac{\ln(n(1 + 1/n))}{\ln(n)}\right) = \ln\left(\frac{\ln(n) + \ln(1 + 1/n)}{\ln(n)}\right) = \ln\left(1 + \frac{\ln(1 + 1/n)}{\ln n}\right),$$

ou bien en partant du résultat et en réduisant au même dénominateur.

c) $u_n = \ln\left(1 + \frac{\ln(1 + 1/n)}{\ln n}\right) \sim \ln(1 + 1/(n \ln(n))) \sim 1/(n \ln(n))$ en l'infini.

d) Les deux séries sont à signe constant et à terme general équivalents donc puisque $\sum_{n \geq 2} u_n$

diverge, $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ diverge aussi.

Cette série numérique fait partie d'une grande famille de séries dites de Bertrand.

Exercice 3 : 5 points

On considère un système linéaire discret (S) qui à toute entrée causale $x(n)$ associe la sortie $y(n)$ définie par

$$y(n) = (h \star x)(n).$$

Soit y_{ind} la réponse indicielle (i.e. la réponse à l'entrée $x(n) = \mathcal{U}(n)$).

1 °) $Y_{ind}(z) = H(z)X(z) = H(z)\frac{z}{z-1}$.

2 °)

a) $TZ(y_{ind}(n) - y_{ind}(n-1))(z) = Y_{ind}(z) - Y_{ind}(z)/z = H(z)\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z(z-1)}\right) = H(z)\left(\frac{z-1}{z-1}\right) = H(z)$

b) En prenant la TZ^{-1} on déduit que $\forall n \in \mathbb{Z}, y_{ind}(n) - y_{ind}(n-1) = h(n)$

c) On suppose dans cette question uniquement que le système (S) est RIF. Donc par définition d'un système RIF cela signifie qu'il existe un rang N à partir duquel $h(n) = 0$ soit d'après la question précédente que $y_{ind}(n) - y_{ind}(n-1) = 0$ à partir du rang N , ce qui signifie que la suite $y_{ind}(n)$ est constante à partir de N .

3 °) (bonus)

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{ind}(n) = l \in \mathbb{R}$, et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{ind}(n-1) = l \in \mathbb{R}$ ce qui entraîne que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{ind}(n) - y_{ind}(n-1) = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(n) \in \mathbb{R}$, et cette dernière égalité traduit que (S) est stable.

Exercice 4 : 6 points

On considère un système linéaire discret (S) qui à toute entrée causale $x(n)$ associe la sortie $y(n)$ définie par

$$y(n) = y(n-1) + 2[x(n) + x(n-1)]$$

1 °) On calcule la fonction de transfert $H(z)$ associée à ce système (S) en calculant la TZ de l'équation ci-dessus :

$$Y(z) = Y(z)/z + 2(X(z) + X(z)/z)$$

d'où $H(z) = \frac{2 + 2/z}{1 - 1/z}$ soit encore $H(z) = 2\frac{z+1}{z-1}$. Le seul pôle est 1 donc le critère vu en cours nous dit que le système est instable donc de type RII. La dépendance de $y(n)$ en fonction de $y(n-1)$ nous dit aussi que la réalisation de ce système est récursive.

2 °) On a la décomposition en éléments simples immédiate :

$H(z) = 2\frac{z}{z-1} + 2/z\frac{z}{z-1}$, et donc $h(n) = 2\mathcal{U}(n) + 2\mathcal{U}(n-1)$ et donc :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(n) = 4 \neq 0$ donc on retrouve le fait que le système est instable.

3 °) On considère maintenant le système linéaire discret (S_a) défini par

$$y(n) = ay(n-1) + 2[x(n) + ax(n-1)]$$

avec a réel.

a) De même, $H_a(z) = 2\frac{z+a}{z-a}$.

b) Le seul pôle est $z = a$ et donc le système (S_a) est stable ssi $-1 < a < 1$.