Département GEII

Année 2018/2019
1 Avril 2019 (sans blague...)

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé 2A n$^{\text{o}}$3 (2 Heures)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable ni de montre connectée.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *7 points*

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1 °) On veut calculer A^{10}.

a) Calculer les valeurs propres de A et prouver qu'elle est diagonalisable.

b) On admet que la matrice de passage s'écrit : $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice diagonale associée D.

c) Rappeler le lien entre A^{10} et D^{10} et en déduire la valeur exacte de A^{10}.

2 °) On considère le système numérique suivant : $\begin{cases} u_n = -u_{n-1} + 3v_{n-1}, \\ v_n = u_{n-1} + v_{n-1}. \end{cases}$

a) Si on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, vérifier que $U_n = AU_{n-1}$.

b) Déduire de la première question la valeur de u_{10} et de v_{10} si on a $u_0 = 10$ et $u_0 = 20$?

Exercice 2 : *4 points*

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1 °) Prouver que M n'est pas inversible.

2 °) Trouver un vecteur $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ tel que $MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec a et b réels.

Exercice 3 : *6 points*

1 °) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 41 & 9 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Après avoir prouvé que A est inversible calculer A^{-1}.

b) En déduire la résolution du système $\begin{cases} 41x + 9y = 12, \\ 9x + 2y = -8. \end{cases}$

2 °) On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -12 \\ 2 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que B est inversible.

b) Un calculateur (style ordinateur) nous donne $B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 9/2 & -6 \\ -1 & 5/2 & -4 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}$.

En déduire la résolution du système $\begin{cases} x + 3y - 12z = 2, \\ 2x - 8z = -4, \\ x - y - 2z = 6. \end{cases}$

Exercice 4 : *5 points*

On considère l'ensemble $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / M = \alpha I_2 + \beta J,\ \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1 °) Calculer J^2 et prouver que $J^2 \in \mathcal{A}$. On démontrera pour ça que $J^2 = \lambda I_2 + \mu J$ avec λ et μ à déterminer.

2 °) En déduire que si $A = \alpha I_2 + \beta J$ et $A' = \alpha' I_2 + \beta' J$ alors : $A \times A' \in \mathcal{A}$.
Ce résultat signifie que la multiplication est une loi interne.

3 °) Prouver que toute matrice non nulle de $\mathcal{A}$ est inversible.

4 °) Question bonus (+3 points) : Prouver que si $A \in \mathcal{A}$ est différent de la matrice nulle alors son inverse A^{-1} est aussi dans $\mathcal{A}$.
On a ainsi construit une structure dite de groupe pour la multiplication sur $\mathcal{A}$.