Institut Universitaire de Technologie
Aix*Marseille Université

Département GEII [1]

Année 2020/2021
31 Mars 2021

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé 2A n°3 (1h30)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable ni de montre connectée.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *13 points + 1 Bonus*

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

— Partie 1

1 °) Prouver que A est inversible. Calculer A^{-1}.

2 °) Calculer σ_A.

3 °)

a) Prouver que le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A et que le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un autre vecteur propre de A

b) Prouver que $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est aussi vecteur propre de A^{-1}. A quelle valeur propre est il associé ?

c) [Bonus] Retrouver ce résultat en partant de l'égalité matricielle : $A\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{u}$.

d) En déduire le spectre $\sigma_{A^{-1}}$ de A^{-1}.

— Partie 2

On considère le système numérique suivant : $\begin{cases} u_n = 6u_{n-1} - 3v_{n-1}, \\ v_n = -u_{n-1} + 4v_{n-1}. \end{cases}$

4 °) Si on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, vérifier que $U_n = AU_{n-1}$ et donc que $U_n = A^n U_0$.

5 °) On veut calculer u_8 et v_8.

a) Prouver que A est diagonalisable.

b) On admet que la matrice de passage s'écrit : $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice diagonale associée D.

c) Rappeler le lien entre A^8 et D^8 et en déduire la valeur exacte de A^8.

d) en déduire la valeur de u_8 et de v_8 si on a $u_0 = 2$ et $v_0 = 4$.

1. M. Cristofol, E. Jalade, 18/03/21, tous droits réservés

Exercice 2 : *4 points*

Soit la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1 °) Calculer N^2 et N^3.

2 °) Si λ est valeur propre de N, on rappelle qu'il existe un vecteur X non nul tel que : $NX = \lambda X$. En déduire que :

a) Ce vecteur X est aussi vecteur propre de N^2 associé à la valeur propre λ^2 et que X est aussi vecteur propre de N^3 associé à la valeur propre λ^3.

b) Montrer que la seule valeur propre de N est zéro.

Exercice 3 : *6 points*

Soit une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de valeurs propres α et β supposées positives. On construit la matrice d'ordre 4 notée M :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On va prouver que $P_M(\lambda) = P_B(\lambda^2)$.

1 °) Ecrire sans le calculer : $\det(M - \lambda I_4) = P_M(\lambda)$.

2 °) Effectuer la transformation sur les colonnes du déterminant de $M - \lambda I_4$: $C_1 \to C_1 + \lambda C_3$ puis toujours sur le déterminant de$M - \lambda I_4$ la transformation sur les colonnes : $C_2 \to C_2 + \lambda C_4$.

3 °) Développer le déterminant ainsi obtenu et conclure que $P_M(\lambda) = P_B(\lambda^2)$. En déduire le spectre de M.

4 °) Application : Si $B = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, donner le spectre de B et en utilisant le résultat de la question précédente donner le spectre de M :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$