Département GEII

Année 2015/2016
15 Mars 2016

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé n3 (1h30)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 :
Trouver une solution particulière de l'équation $y'(t)+3y(t)=4e^{-3t}$ (on ne demande pas de trouver toutes les solutions).

Exercice 2 :
On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y''(t)+y'(t)-2y(t)=2t+1$.
1 °) Résoudre l'équation homogène associée.
2 °) Trouver une solution particulière de (E) .
3 °) Trouver la fonction $y(t)$ qui est solution de (E) sachant que :
$y(0)=1$
$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{y(t)}{t}$ est finie.

Exercice 3 :
Soit a un paramètre inconnu. On considère l'équation différentielle sur $[0;1]$:

$$(E)\ \ y'(t)+y(t)=a,$$

avec la condition initiale $y(0)=1$.

1 °) Résoudre l'équation différentielle (E) avec la condition initiale. On écrira l'expression de la solution à l'aide du paramètre a.
2 °)
On s'intéresse au problème (dit "problème de contrôle") qui consiste à choisir le paramètre a pour amener la solution $y(t)=(1-a)e^{-t}+a$ à s'annuler en $t=1$.
a) Montrer à l'aide de la question précédente que $y(1)=a\dfrac{e-1}{e}+\dfrac{1}{e}$.
b) En déduire la valeur que l'on doit choisir pour a pour que $y(1)=0$.

Exercice 4 :
Calculer les intégrales suivantes :

1 °) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

2 °) $\displaystyle\int_0^2 te^{-2t}\,dt$

3 °) $\displaystyle\int_0^1 te^{-t^2}\,dt$

4 °) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t-2}{(t+2)(t+4)}\,dt$

Exercice 5 :

1 °) Montrer que $\displaystyle\int_0^2 \frac{dt}{t^2+4} = \frac{\pi}{8}$ à l'aide du changement de variable $t = 2s$.

2 °) Dans cette question, on s'intéresse à l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+2x+5}$.

a) Montrer à l'aide du changement de variable $x = t-1$ que $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{2t-1}{t^2+4}dt$.

b) En s'aidant du résultat de la question 1), calculer la valeur exacte de I.

⟵≀≀≀≀≀≀≀≀≀≀≀≀≀≀≀≀≀≀≀≀≀≀≀≀≀⟶