

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé n°3 (1h30)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable. **Le barème est sur 22 mais la note sera laissée telle quelle sur 20.**

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : 7 points

Calculer

$$I = \int_1^2 \frac{1}{(2t-1)^3} dt,$$

$$J = \int_0^2 te^{3t} dt,$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(5t) dt,$$

$$L = \int_1^2 \frac{1}{t(t+1)} dt,$$

$$M = \int_0^1 t^3(t^4+1)^5 dt.$$

Exercice 2 : 4 points

Soit $I = \int_0^3 \frac{t}{t^2 - 6t + 18} dt.$

1 °) **A l'aide** du changement de variable $t = 3x + 3$ et en détaillant les étapes, montrer que

$$I = \int_{-1}^0 \frac{x+1}{x^2+1} dx.$$

2 °) En déduire la valeur exacte de I .

Exercice 3 : 4 points

Soit l'équation homogène

$$(E) \quad y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0.$$

1 °) Donner la solution générale de (E) .

2 °) Déterminer la solution spéciale de (E) telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 4 : 2 points

Soit l'équation différentielle (E) $y'(t) + 3y(t) = f(t)$ où $f(t)$ est une fonction donnée. Trouver **une solution particulière** de (E) si

$$f(t) = te^{-3t}.$$

On ne cherchera pas une solution générale de (E)

Exercice 5 : 5 points

Soit l'équation intégro-différentielle

$$(A) \quad y'(t) - 4 \int_0^t y(s) ds = 4t,$$

où la solution $y(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1 °) Démontrer que si $y(t)$ est une solution de (A), alors $y'(t)$ est aussi dérivable.

2 °) En déduire que si $y(t)$ est une solution de (A), alors elle est solution de (B), avec :

$$(B) \quad y''(t) - 4y(t) = 4.$$

3 °)

a) Vérifier que si $y(t)$ est une solution de (A), alors $y'(0) = 0$.

b) Donner l'expression d'une solution de (B) qui ne soit pas solution de (A).

c) Que peut-on en déduire ?