Département GEII

Année 2017/2018
20 Mars 2018

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé n$^{\mathrm{O}}$3 (1h30)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.
Le barème est sur 24 mais la note sera laissée telle quelle sur 20.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *6 points*
Calculer les intégrales suivantes :

$I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(3t-1)^4}\, dt,$
$J = \displaystyle\int_0^1 xe^{x^2-3}\, dx,$
$K = \displaystyle\int_0^\pi \sin(3t)\, dt,$
$L = \displaystyle\int_2^5 \frac{dt}{(t-1)(t+1)}.$
$M = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin t \cos^4 t\, dt.$

Exercice 2 : *6 points*
Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}\ln(1+t)\, dt.$

1 °) A l'aide du changement de variable $t = s^2$ et **en détaillant les étapes**, montrer que

$$I = 2\int_0^1 s^2 \ln(1+s^2)\, ds.$$

2 °) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \dfrac{2}{3}\ln 2 - \dfrac{4}{3}\displaystyle\int_0^1 \frac{s^4}{1+s^2}\, ds.$

3 °)

a) Vérifier que $\dfrac{s^4}{1+s^2} = s^2 - 1 + \dfrac{1}{1+s^2}.$

b) En déduire la valeur de I.

Exercice 3 : *6 points*
Soit l'équation différentielle d'ordre deux :

$$(E)\ \ y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2\cos t.$$

1 °) Résoudre l'équation homogène associée à (E). On appelle $y_H(t)$ une solution de l'équation homogène.
2 °) **Vérifier** que $y_p(t) = \sin t$ est une solution particulière de (E).
3 °) Déterminer la solution spéciale de (E) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ (appelée solution du système initialement au repos).
4 °) Prouver que si $t \geq 5$, on a $y(t) = y_p(t)$ à 10^{-2} près.

Exercice 4 : *4 points*
Soit l'équation différentielle $(E)\ \ y'(t) + \alpha y(t) = f(t)$ où $f(t)$ est une fonction continue donnée et α un réel donné.
On suppose que l'on connait une solution $y_h(t)$ de l'équation homogène associée à (E) :

$$y_h(t) = 3e^{(2/3)t}$$

et une solution particulière $y_p(t)$ de (E) :

$$y_p(t) = (t-1)e2t$$

.
1 °)
Trouver alors α (grace à $y_h(t)$) et en déduire $f(t)$.
2 °)
Trouver la solution spéciale de (E) vérifiant $y(0) = 0$.