

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé n°3 (1h30)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction.

Pas de téléphone portable ni de **montre connectée**.

Le barème est sur 22 mais la note sera laissée telle quelle sur 20.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : 6 points

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_3^2 \frac{1}{(t-1)^3} dt,$$

$$J = \int_0^1 e^{5x-3} dx,$$

$$K = \int_0^\pi \cos(4t) dt,$$

$$M = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 3t}{2 + \sin 3t} dt.$$

Exercice 2 : 6 points

Soit $I = \int_0^9 \sqrt{t} \ln(1+t) dt$.

1 °) A l'aide du changement de variable $t = s^2$ et **en détaillant les étapes**, montrer que

$$I = 2 \int_0^3 s^2 \ln(1+s^2) ds.$$

2 °) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = 18 \ln 10 - \frac{4}{3} \int_0^3 \frac{s^4}{1+s^2} ds$.

3 °)

a) Vérifier que $\frac{s^4}{1+s^2} = s^2 - 1 + \frac{1}{1+s^2}$.

b) En déduire la valeur de I .

Exercice 3 : 6 points

Soit l'équation différentielle d'ordre deux :

$$(E) \quad y''(t) + y(t) = 51e^{-\frac{t}{2}}.$$

avec $y(0) = 10$ et $y'(0) = -10$.

1 °) On cherchera une solution particulière de (E) de la forme $y_p(t) = ke^{-t/2}$ avec k constante réelle. Trouver alors la solution de (E) vérifiant les conditions initiales ci-dessus.

2 °) A partir de quel temps t_0 peut-on considérer la solution comme sinusoïdale avec une erreur inférieure à 10^{-2} près ?

Exercice 4 : 4 points

La vitesse $y(t)$ de rotation d'un moteur est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{2}y'(t) + y(t) = 146 \quad (E)$$

1 °) Sachant que la vitesse initiale du moteur (en $t = 0$) est 150 rad/s, déterminer la solution de (E).

2 °) On note $y_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$. Calculer la perte de vitesse : $y(0) - y_\infty$.

3 °) La vitesse est dite stabilisée si : $\left| \frac{y(t) - y_\infty}{y_\infty} \right|$ est inférieure à 1 pour cent. Calculer le temps t (en secondes) mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse (on donnera le résultat à 10^{-2} près).