Département GEII[1]

Année 2019/2020
17 Mars 2020

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé n$^{\text{o}}$3 (1h30)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction.
Pas de téléphone portable ni de **montre connectée.**
Le barème est sur 23 mais la note sera laissée telle quelle sur 20.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *3 points*
Trouver une solution sinusoïdale de l'équation

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = \sin(3x).$$

Exercice 2 : *2 points*
Prouver que $\arg\left(\dfrac{12-8j}{3+3j}\right) = -\arctan 5$.

Exercice 3 : *3 points*
Trouver les solutions de l'équation

$$y''(x) + 4y'(x) - 5y(x) = 0.$$

Exercice 4 : *8 points*
Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 x^2(x^3+1)^4\,dx,$$
$$J = \int_0^{\pi/2} t\sin 4t\,dt,$$
$$K = \int_0^{\pi/2} \sin t\ e^{\cos t}\,dt,$$
$$M = \int_1^2 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx.$$

1. M. Cristofol, E. Jalade, 09/03/20,

Exercice 5 : *7 points*

Soit $P(x)$ la solution polynomiale particulière de l'équation : $y'(x) + y(x) = 1 + x^4$. On pose $f(x) = P(x)e^x$. Pour les questions $1, 2$ et 3 on ne calculera pas $P(x)$.

1 °) Expliquer pourquoi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

2 °) Montrer que $f(x)$ est strictement croissante.

3 °) En déduire que $P(x) > 0$.

4 °) Prouver que $P(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 25$.

5 °) Soit $y(x)$ uns solution de l'équation $y'(x) + y(x) = 1 + x^4$.

- **a**) Donner l'expression générale de $y(x)$.
- **b**) Pour quelles conditions initiales $y(0) = \alpha$ a-t-on $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) > 0$?