Département GEII
IUT MARSEILLE

Le 5 Juin 2018

Test mathématiques n°4 (MA 2)

Durée : 1h 30

Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.
Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1.

1) Soit $I=\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\,dt.$ Quelle est la nature de I ?

2) a) Montrer que en $+\infty$, $\ln(t)<\sqrt{t}$.

b) En déduire la nature de $J=\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt.$

Exercice 2.

On considère un système qui à une entrée $x(t)$ associe la sortie $y(t)=x(t)*h(t)$. Soit $H(p)$ la fonction de transfert de ce système. Soit enfin $y_{\text{ind}}(t)$ la réponse indicielle du système.

1) Montrer que $Y_{\text{ind}}(p)=\frac{H(p)}{p}.$

On suppose dorénavant que $y_{\text{ind}}(t)=2(1-e^{-3t})\mathrm{U}(t).$

2) a) Calculer $Y_{\text{ind}}(p).$

b) En déduire que $H(p)=\frac{6}{p+3}.$

3) a) Étudier la stabilité du système.
b) Calculer l'expression de $h(t).$

4) On considère en entrée une impulsion de durée $a>0,$ modélisée par la fonction $x_a(t)=\begin{cases}1 & \text{si } t\in[0;a[\\ 0 & \text{si } t\notin[0;a[\end{cases}$. Le but de la question est de trouver la valeur minimale de la durée *a* pour que la réponse $y_a(t)$ soit détectable, au sens où la fonction $t\to|y_a(t)|$ atteint ou dépasse la valeur 0,1.

a) Montrer que $y_a(t)=y_{\text{ind}}(t)-y_{\text{ind}}(t-a).$

b) Donner à l'aide du paramètre a les expressions de $y_a(t)$ sur les intervalles $[0,a[$ et $[a;+\infty[$. Donner ensuite sans démonstration le tableau de variation de la fonction y_a sur $[0;+\infty[$.

c) En déduire la valeur minimale de *a* pour que la réponse $y_a(t)$ soit détectable. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice 3.

On considère le signal « carré » 2-périodique défini par : $x(t)=\begin{cases}1 \text{ si } t\in[0;1[\\ 0 \text{ si } t\in[1;2[\end{cases}$. Soit

$SF(x)(t)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty} A_n\cos(n\omega t)+B_n\sin(n\omega t)$ la série de Fourier associée .

1) a) Montrer que $A_0=\frac{1}{2.}$

   b) Calculer la valeur de ω.

   c) A-t-on $\forall\, t\in\mathbb{R},\ SF(x)(t)=x(t)$? Justifier.

2) Montrer que $\forall\, n\geq 1,\ A_n=0.$

On admet que $\forall\, n\geq 1,\ B_n=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$. Remarquer que les harmoniques d'ordre pair sont nulles. On considère le signal « carré » 2-périodique défini par : $y(t)=\begin{cases}a \text{ si } t\in[0;1[\\ b \text{ si } t\in[1;2[\end{cases}$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.

3) a) Vérifier que $y(t)=b+(a-b).x(t)$ (on pourra raisonner séparément sur les intervalles $[0;1[$ et $[1;2[$.)

   b) En déduire que $S(y)(t)=\frac{a+b}{2}+(a-b)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin(n\pi t)$.

4) On suppose qu'après filtrage de $y(t)$ par un filtre passe-bas parfait de fréquence de coupure f_c , on obtient le signal $\tilde{y}(t)=\pi+3\sin(\pi t)$. Le but de cette question est de retrouver la valeur de a et de b à partir de la connaissance de $\tilde{y}(t)$, et d'estimer la perte de puissance moyenne du signal après filtrage.

   a) Quel est l'intervalle de valeurs possibles pour f_c (on rappelle que les harmoniques d'ordre pair sont nulles) ?

   b) Montrer que $a=\frac{7\pi}{4}$ et $b=\frac{\pi}{4}$.

   c) Prouver par un calcul direct que la puissance moyenne de $y(t)$ vaut $\frac{25\pi^2}{16}$.

   d) Quel est le pourcentage de la puissance moyenne de $y(t)$ que l'on a perdue après filtrage ?