Département GEII
IUT MARSEILLE

Le 6 Juin 2018

Test mathématiques n°4 (MA 2) CORRIGÉ

Durée : 1h 30

Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.
Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

- -

Remarque : *Pour ce sujet, la rédaction et la précision des arguments apportés sont particulièrement à soigner.*

Exercice 1.*(3 points)*

1) Soit $I=\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}dt.$ **Quelle est la nature de I ? Justifier.**

En $+\infty$, $\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\sim\frac{\sqrt{t}}{t^2}=\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}>0$. Par le critère de Riemann, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{dt}$ converge donc par le critère d'équivalence , I converge.

2) a) Démontrer que en $+\infty$ **,** $\ln(t)<\sqrt{t}$ **.**

Par les croissances comparées, $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}=0.$ Donc pour *t* assez grand, $\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}<1$, d'où pour *t* assez grand, $\ln(t)<\sqrt{t}.$

b) En déduire la nature de $J=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^2}dt.$

Pour *t* assez grand, $0<\ln(t)<\sqrt{t}$, donc $0<\frac{\ln(t)}{1+t^2}<\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}$. Par le critère de comparaison, puisque I converge, alors J converge.

Exercice 2. *(9 points)*

On considère un système linéaire causal invariant dans le temps qui à une entrée $x(t)$ **associe la sortie** $y(t)=x(t)*h(t)$ **. Soit** $H(p)$ **la fonction de transfert de ce système. Soit enfin** $y_{\text{ind}}(t)$ **la réponse indicielle du système.**

1) Montrer que $Y_{\text{ind}}(p)=\frac{H(p)}{p}$.

On a $y_{\text{ind}}(t)=h(t)*U(t)$, donc en prenant la transformée de Laplace des deux membres de cette égalité, et en utilisant le fait que la transformée de Laplace de $U(t)$ est $\frac{1}{p}$, il vient que :

$$Y_{\text{ind}}(p)=H(p).\frac{1}{p}=\frac{H(p)}{p}.$$

On suppose dorénavant que $y_{\text{ind}}(t)=2(1-e^{-3t})\mathrm{U}(t)$.

2) a) Calculer $Y_{\text{ind}}(p)$.

En partant de l'expression $y_{\text{ind}}(t)=2\,\mathrm{U}(t)-e^{-3t}\mathrm{U}(t)$, on obtient :

$$Y_{\text{ind}}(p)=\frac{2}{p}-2.\frac{1}{p+3}=\frac{6}{p(p+3)}.$$

b) **En déduire que** $H(p)=\frac{6}{p+3}$.

D'après le 1), $H(p)=p.Y_{\text{ind}}(p)=p.\frac{6}{p(p+3)}=\frac{6}{p+3}$.

3) a) Étudier la stabilité du système.

Le nombre– 3 est l'unique pôle de $H(p)$. Sa partie réelle est strictement négative, donc d'après une propriété de cours, le système est stable.

b) Calculer l'expression de $h(t)$.

La fonction $h(t)$ est l'originale de $H(p)$. Le formulaire donne $h(t)=6e^{-3t}\mathrm{U}(t)$.

4) On considère en entrée une impulsion de durée $a>0$, **modélisée par la fonction** $x_a(t)=\begin{cases}1 \text{ si } t\in[0;a[\\ 0 \text{ si } t\notin[0;a[\end{cases}$ **. Le but de la question est de trouver la valeur minimale de la durée** ***a*** **pour que la réponse** $y_a(t)$ **soit détectable, au sens où la fonction** $t\to|y_a(t)|$ **atteint ou dépasse la valeur 0,1.**

a) Montrer que $y_a(t)=y_{\text{ind}}(t)-y_{\text{ind}}(t-a)$.

On remarque tout d'abord que $x_a(t)=\mathrm{U}(t)-\mathrm{U}(t-a)$.

La sortie associée à U(t) est $y_{\text{ind}}(t)$, donc par invariance dans le temps du système, la sortie associée à U(t-a) est $y_{\text{ind}}(t-a)$. Enfin, par linéarité du système, la sortie associée à $x_a(t)$ est $y_a(t)=y_{\text{ind}}(t)-y_{\text{ind}}(t-a)$.

b) Donner à l'aide du paramètre ***a*** **les expressions de** $y_a(t)$ **sur les intervalles** $[0,a[$ et $[a;+\infty[$. **Donner ensuite sans démonstration le tableau de variation complet de la fonction** y_a **sur** $[0;+\infty[$.

Si $t\in[0;a[$, $y_a(t)=y_{\text{ind}}(t)-y_{\text{ind}}(t-a)=y_{\text{ind}}(t)$, car puisque $t-a<0$ et puisque $y_a(t)$ est causale, $\forall t\in[0;a[$, $y_a(t-a)=0$. Ainsi, $\forall t\in[0;a[$, $y_a(t)=2(1-e^{-3t})$.

Si $t\in[a;+\infty[$, $y_a(t)=y_{\text{ind}}(t)-y_{\text{ind}}(t-a)=y_{\text{ind}}(t)=2(1-e^{-3t})-2(1-e^{-3(t-a)})=2(e^{-3(t-a)}-e^{-3t})$

$$=2(e^{-3(t-a)}-e^{-3t})=2(e^{3a}-1).e^{-3t}.$$

Conclusion : $y_a(t)=\begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ 2(1-e^{-3t}) \text{ si } t\in[0;a[\\ 2(e^{3a}-1).e^{-3t} \text{ si } t\geq a.\end{cases}$.

On vérifie que $y_a(t)$ est continue : $y(0^-)=y(0^+)=0$ et $y(a^-)=y(a^+)=2(1-e^{-3a})$.

On calcule ensuite la dérivée pour $t\neq 0$ et $t\neq a$: :

$$y'_a(t)=\begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ 6e^{-3t} \text{ si } t\in]0;a[\\ -6(e^{3a}-1).e^{-3t} \text{ si } t>a.\end{cases}$$

On voit alors que $y'_a(t)>0$ si $t\in]0;a[$ et $y'_a(t)<0$ si $t>a$.

On en déduit que y_a croît sur $[0,a]$ et décroît sur $[a;+\infty[$. De plus $y_a(0)=0, y_a(a)=2(1-e^{-3a})$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y_a(t)=0.$

c) En déduire la valeur minimale de *a* pour que la réponse $y_a(t)$ soit détectable. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

De la question précédente, on déduit que $\forall\, t\in\mathbb{R},\ 0\leq y_a(t)\leq 2(1-e^{-3a})$. Donc, $y_a(t)$ est détectable si et seulement si $2(1-e^{-3a})\geq 0{,}1$. On en déduit que $e^{-3a}\leq 0{,}95$ d'où la condition $a\leq -\frac{1}{3}\ln(0{,}95)\sim 0{,}017$.

Exercice 3. *(11 points)*

On considère le signal « carré » 2-périodique défini par : $x(t)=\begin{cases} 1 \text{ si } t\in[0;1[\\ 0 \text{ si } t\in[1;2[\end{cases}$ **. Soit** $SF(x)(t)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty} A_n\cos(n\omega t)+B_n\sin(n\omega t)$ **la série de Fourier associée .**

1) a) Montrer que $A_0=\frac{1}{2.}$

$A_0=\frac{1}{2}\int_0^2 x(t)\,\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\int_0^1 1\,\mathrm{dt}=\frac{1}{2}$.

b) Calculer la valeur de ω.

$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$.

c) Tracer le signal $x(t)$ **sur** $[-2,4]$.

d) Quelles sont les valeurs de *t* pour lesquelles on a : $SF(x)(t)=x(t)$ **? Donner la valeur de** $SF(x)(t)$ **pour les autres valeurs de *t*.**

D'après le Théorème de convergence des séries de Fourier de Dirichlet, $SF(x)(t)=x(t)$ pour les valeurs de t pour lesquelles x(t) est continue, c'est à dire $t\notin\mathbb{Z}$.

Si $t\in\mathbb{Z}$, toujours par le Théorème de Dirichlet, $SF(x)(t)=\frac{1}{2}\left|x(t^-)+x(t^+)\right|=\frac{1}{2}$ si t est pair et $SF(x)(t)=-\frac{1}{2}$ si t est impair.

2) **Montrer que** $\forall\ n\geq 1,\ A_n=0.$

$$A_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x(t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t=[\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}]_0^1=0$$

car $\sin(n\pi)=\sin(0)=0.$

3)

On admet que $\forall\ n\geq 1,\ B_n=\dfrac{1-(-1)^n}{n\pi}$. **On remarquera que cela implique que les harmoniques d'ordre pair sont nulles. On considère dorénavant le signal « carré » 2-périodique défini par :**

$$y(t)=\begin{cases} a \text{ si } t\in[0;1[\\ b \text{ si } t\in[1;2[\end{cases}$$ **avec** $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.

4) **a) Vérifier que** $y(t)=b+(a-b).x(t)$ **(on pourra raisonner séparément sur les intervalles** $[0;1[$ et $[1;2[$. **)**

Les fonctions $y(t)$ et $b+(a-b).x(t)$ étant 2-périodiques, on vérifie l'égalité sur l'intervalle $[0;2[$ en distinguant deux cas :

Si $t\in[0;1[$, $b+(a-b).x(t)=b+(a-b).1=a=x(t).$

Si $t\in[1;2[$, $b+(a-b).x(t)=b+(a-b).0=b=x(t).$

b) En déduire que $SF(y)(t)=\dfrac{a+b}{2}+(a-b)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin(n\pi t).$

On déduit que $SF(y)(t)=b+(a-b)SF(x)(t).$

D'après les calculs effectués plus haut, on a :

$$SF(x)(t)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos(n\omega t)+B_n\sin(n\omega t)$$

$$SF(y)(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin(n\pi t).$$

On a donc :

$$SF(y)(t)=b+(a-b)SF(x)(t)=b+(a-b)\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin(n\pi t)\right)$$

$$=b+\frac{a-b}{2}+(a-b)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin(n\pi t)\right)$$

$$=\frac{a+b}{2}+(a-b)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin(n\pi t)$$

5) **On suppose qu'après filtrage de** $y(t)$ **par un filtre passe-bas parfait de fréquence de coupure** f_c **, on obtient le signal** $\tilde{y}(t)=\pi+3\sin(\pi t)$. **Le but de cette question est de retrouver la valeur de *a* et de *b* à partir de la connaissance de** $\tilde{y}(t)$ **, et d'estimer la perte de puissance moyenne du signal après filtrage.**

a) Quel est l'intervalle de valeurs possibles pour f_c **(on rappelle que les harmoniques d'ordre pair sont nulles) ?**

Etant donné que l'harmonique d'ordre 2 est nulle, le filtre doit laisser passer le fondamental $2(a-b)\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)$ de fréquence $\frac{1}{2}$ et bloquer l'harmonique d'ordre 3 $\frac{2(a-b)}{3\pi}\sin(3\pi t)$ de fréquence $\frac{3}{2}$.

On en déduit que $\frac{1}{2} < f_c < \frac{3}{2}$.

b) Montrer que $a = \frac{7\pi}{4}$ **et** $b = \frac{\pi}{4}$ **.**

Par identification avec la série de Fourier trouvée au 4) b) (unicité de la série de Fourier d'un signal) , on trouve par comparaison des valeurs moyennes et des fondamentaux :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{a+b}{2} + 2(a-b)\frac{1}{\pi}\sin(\pi t) = \pi + 3\sin(\pi t) \quad .$$

On en déduit que (par comparaison de valeurs moyennes et des amplitudes) que

$\frac{a+b}{2} = \pi$ et $\frac{2a-2b}{\pi} = 3$.

On obtient le système :

$$\begin{cases} a+b = 2\pi \\ a-b = \frac{3\pi}{2} \end{cases} .$$

La résolution de ce système donne : $a = \frac{7\pi}{4}$ et $b = \frac{\pi}{4}$ **.**

c) Prouver par un calcul direct que la puissance moyenne de $y(t)$ **vaut** $\frac{25\pi^2}{16}$.

La définition directe donne

$$\begin{aligned} < y^2(t) > &= \frac{1}{2}\int_0^2 y^2(t)\ \mathrm{dt} = \frac{1}{2}\int_0^1 y^2(t)\ \mathrm{dt} + \frac{1}{2}\int_1^2 y^2(t)\ \mathrm{dt} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 a^2\ \mathrm{dt} + \frac{1}{2}\int_1^2 b^2\ \mathrm{dt} = \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{49\pi^2}{16} + \frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{25\pi^2}{16}. \end{aligned}$$

d) Calculer la puissance moyenne de $\tilde{y}(t)$ **. Quel est le pourcentage de la puissance moyenne de** $y(t)$ **que l'on a perdue après filtrage (arrondir au dixième de %) ?**

En utilisant le Théorème de Parseval pour $\tilde{y}(t)$, on obtient :

$$< \tilde{y}^2(t) > = \pi^2 + \frac{1}{2}.3^2 = \pi^2 + \frac{9}{2}.$$

La puissance perdue après filtrage est donc égale à

$$< y^2(t) > - < \tilde{y}^2(t) > = \frac{25\pi^2}{16} - \pi^2 - \frac{9}{2} = \frac{9\pi^2}{16} - \frac{9}{2} \quad .$$

Le pourcentage de puissance moyenne perdue après filtrage vaut donc :

$$\frac{\frac{9\pi^2}{16} - \frac{9}{2}}{\frac{25\pi^2}{16}}.100 = \left(\frac{9}{25} - \frac{72}{25\pi^2}\right).100 \sim 6{,}8\,\%$$