Deux remarques sur les flots généralisés d'équations différentielles ordinaires

Maxime Hauray [a], Claude Le Bris [b], Pierre-Louis Lions [c]

[a] *Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université P. & M. Curie, Boite courrier 187, 75252 Paris Cedex 05, FRANCE*

[b] *CERMICS, École Nationale des Ponts et Chaussées, 77455 Marne-La-Vallée Cedex 2, and INRIA Rocquencourt, MICMAC project, B.P. 105, 78153 Le Chesnay Cedex, FRANCE*

[c] *Collège de France, 11, place Marcelin Berthelot, 75231 Paris Cedex 05, and CEREMADE, Université Paris Dauphine, Place de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, FRANCE*

Reçu le *****; accepté après révision le +++++

Présenté par Pierre-Louis Lions

Résumé

Nous exposons ici deux remarques sur la notion de flot généralisé, introduite par DiPerna et le troisième auteur dans [6], pour les équations différentielles ordinaires. D'une part, nous fournissons une preuve *autonome* de l'unicité d'un tel flot, c'est-à-dire une preuve ne reposant pas sur l'interprétation du flot généralisé en termes de flot pour l'équation de transport associée. D'autre part, en utilisant cette fois l'équation de transport associée, nous généralisons sensiblement la preuve d'unicité fournie dans [6] en nous affranchissant pour le flot de l'hypothèse de structure de groupe en temps. *Pour citer cet article : A. Nom1, A. Nom2, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

Abstract

Two remarks on generalized flows for ordinary differential equations

This Note presents two remarks on the notion of generalized flow solution to ordinary differential equations, as introduced by DiPerna and the third author in [6]. On the one hand, we provide a *self-contained* proof of the uniquenesss of such a flow. By this, we mean that our new proof does not exploit the interpretation of the generalized flow in terms of flow for the associated linear transport equation. On the other hand, this time using the associated linear transport equation, we slightly extend the result of uniqueness contained in [6], proving it holds without the group property of the flow (in the time variable). *To cite this article: A. Nom1, A. Nom2, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

Email addresses: `hauray@ann.jussieu.fr` (Maxime Hauray), `lebris@cermics.enpc.fr` (Claude Le Bris), `lions@ceremade.dauphine.fr` (Pierre-Louis Lions).

Abridged English version

This Note mainly consists of two remarks on the notion of generalized flow solution to ordinary differential equations $\dot{X} = \mathbf{b}(X)$, as introduced by DiPerna and the third author in [6]. For convenience, the precise definition of a generalized flow is recalled in Definition 1.1 below. In the work [6], the approach to prove existence and uniqueness of the flow solution to the ordinary differential equation is based upon the equivalence (established there and complemented in [8]) between the existence and uniqueness of the generalized flow solution and the unique solvability of the linear transport equation $\frac{\partial f}{\partial t} - \mathbf{b} \, . \nabla f = 0$. In other words, the existence and uniqueness of the Lagrangian flow follows from arguments performed on the Eulerian formulation of the equation. The typical conditions that ensure existence and uniqueness of this flow are: the field $\mathbf{b}$ has bounded divergence and has Sobolev ($W^{1,1}$) regularity, up to irrelevant conditions on the growth at infinity of the field $\mathbf{b}$, which are unnecessary in the specific (periodic) setting we consider in this Note. In fact, a self-contained proof, which does not rely on the equivalence of viewpoints, may be presented. It is the purpose of Section 2 in the french version. The bottom line for this self-contained approach is to perform the regularization procedure (which is central in the original proof in [6]) on the ordinary differential equation itself. The argument is sketched below, see (8) to (11)). It in fact mimicks step by step the proof of the well known commutation lemma of [6], which was instrumental in the proof *via* the transport equation.

On the other hand, this time using the correspondence with the linear transport equation viewpoint, we slightly extend in Section 3 of the french version the uniqueness statement contained in [6, Theorem III.1] for the generalized flow. In fact, the uniqueness holds without assuming the group property (6). The proof consists of the arguments (12) to (15).

Both remarks may be related to some recents works by L. Ambrosio and coll. [2], G. Crippa et C. De Lellis [4,5].

1. Introduction

L'objet de cette Note est de faire quelques remarques sur la notion de flot généralisé pour les équations différentielles ordinaires, au sens introduit par DiPerna et le troisième auteur dans [6]. Nous écrivons cette équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{X} = \mathbf{b}(X), & t \in \mathbb{R} \\ X(t=0) = x, \end{cases} \tag{1}$$

globalement en espace, sans préciser pour le moment celui-ci. La notation $\dot{X}$ désigne bien sûr la dérivation en temps. Nous notons $X(t,x)$ la solution de cette équation, dépendant du temps t et de la position initiale x.

Les deux remarques essentielles faites ici concernent :

- une preuve autonome de l'unicité du flot, sous de bonnes conditions bien sûr, sans passer par l'interprétation du flot généralisé en termes de flot pour l'équation de transport associée :

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \mathbf{b} \, . \nabla f = 0 \tag{2}$$

- une (petite) généralisation (cette fois obtenue en utilisant le point de vue "équation de transport") de l'unicité du flot, consistant à s'affranchir de l'hypothèse de structure de groupe pour le flot.

Ces deux remarques font l'objet des sections 2 et 3 respectivement.

Pour simplifier la présentation et éviter des détails techniques inutiles, nous nous placerons dans le cadre le plus simplifié possible. Premièrement, on suppose que l'équation différentielle (1) est posée pour x et $X(t,x)$ dans le tore $\mathbb{T}^N$ de dimension N. Lorsque l'équation est posée sur l'espace $\mathbb{R}^N$ tout entier, les hypothèses, les raisonnements et les conclusions ci-dessous doivent être adaptés pour tenir compte des comportements à l'infini. Voir [6,7,8] pour les modifications typiques à effectuer (qui ne changent pas la nature du problème). En particulier, ce cadre "borné périodique" permet de s'affranchir d'une bonne partie des questions de non intégrabilité (locale) de la solution X, évitant ainsi certaines formulations renormalisées.

Deuxièmement, on suppose le champ de vecteurs $\mathbf{b}$ à divergence nulle :

$$\operatorname{div}\mathbf{b} = 0, \tag{3}$$

au sens des distributions. Le cas de champs à divergence bornée, ou même bornée inférieurement, peut être traité de manière analogue (voir encore, par exemple, [6]).

Troisièmement, on suppose le champ $\mathbf{b}$ indépendant du temps. La encore, on peut adapter le cas échéant le cadre mathématique ci-dessous au cas d'une dépendance L^1 en temps.

Quatrièmement, on traite le cas d'un champ de vecteur

$$\mathbf{b} \in W^{1,1}(\mathbb{T}^N) \tag{4}$$

laissant de côté le cas $W^{1,p}$, pour les $1 < p \leq +\infty$. Tous les arguments ci-dessous s'adaptent alors à ce cas.

On rappelle de [6,8] la définition suivante :

Définition 1.1 *On dit que $X(t,x)$ est* flot presque partout *solution de (1) si X est une application de $\mathbb{R}\times\mathbb{T}^N$ dans $\mathbb{T}^N$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $X \in C(\mathbb{R}, L^1)$,

(ii) conservation de la mesure de Lebesgue :

$$\int \varphi(X(t,x))\,dx = \int \varphi(x)\,dx, \quad \forall\varphi \in C^\infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

(iii) propriété de groupe en temps :

$$X(t+s,x) = X(t, X(s,x)), \quad \text{p.p en } x, \quad \forall s,t \in \mathbb{R} \tag{6}$$

(iv) équation (2) au sens des distributions ou (ce qui est équivalent vu les propriétés précédentes)

$$X(t,x) = x + \int_0^t \mathbf{b}\,(X(s,x))\,ds, \quad \text{p.p en } x, \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{7}$$

et le résultat suivant :

Théorème 1.2 [de [6, Theorem III.1]] *Sous les hypothèses (3) et (4), il existe un et un unique flot généralisé de (1) au sens de la Définition 1.1.*

2. Preuve autonome de l'unicité

Comme nous l'avons dit ci-dessus, nous voulons fournir une preuve de l'unicité du flot généralisé, qui ne passe pas par un argument sur l'équation de transport (2). En fait, un argument autonome de ce type a été donné récemment par G. Crippa et C. De Lellis dans [4,5]. Dans ces travaux, l'unicité du flot lagrangien découle d'estimées quantitatives de stabilité du flot par rapport aux modifications du champ de vecteur $\mathbf{b}$. La preuve est intéressante et repose sur des arguments du type de ceux contenus dans [2]. Cependant, les auteurs de [4,5] y indiquent que leur stratégie de preuve couvre le cas de tous les champs de vecteurs $W^{1,p}$, dès que $p > 1$, mais ne couvre pas le cas $p = 1$.

La preuve que nous donnons maintenant est élémentaire, restreinte à la question de l'unicité, et ne donne pas, au contraire des travaux des auteurs ci-dessus, d'estimée *quantitative* de la distance entre deux flots. Elle donne cependant bien sûr la stabilité des solutions. Notre preuve est l'analogue, "ligne à ligne", de la preuve sur les équations de transport originalement donnée dans [6]. Elle s'applique donc en particulier au cas $W^{1,1}$, qui est précisément celui explicité ici. De plus, elle est en fait significativement plus simple que la preuve passant par l'équation de transport.

Supposons que $\mathbf{b}$ vérifie (3) et (4) et rappelons que nous travaillons sur le tore $\mathbb{T}^N$. Donnons-nous alors deux flots généralisés $X(t,x)$ et $Y(t,y)$ solutions de (1) au sens de la Définition 1.1. Nous introduisons un noyau de régularisation

$$\rho_\varepsilon = \varepsilon^{-N}\rho(\varepsilon^{-1}\,\cdot), \quad \text{avec} \quad \rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),\ \rho \geq 0 \int \rho = 1.$$

Considérons :

$$\frac{d}{dt}\int\int_{\mathbb{T}^N\times\mathbb{T}^N} |X(t,x) - Y(t,y)|\ \rho_\varepsilon(x-y)\,dx\,dy. \tag{8}$$

On a successivement :

$$\frac{d}{dt}\int\int_{\mathbb{T}^N\times\mathbb{T}^N} |X(t,x) - Y(t,y)|\ \rho_\varepsilon(x-y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{d}{dt}\int\int_{\mathbb{T}^N\times\mathbb{T}^N} |x-y|\ \rho_\varepsilon(X(-t,x) - Y(-t,y))\,dx\,dy,$$

en utilisant la propriété de groupe (iii), et la conservation de la mesure de Lebesgue (ii),

$$= \int\int_{\mathbb{T}^N\times\mathbb{T}^N} |x-y|\ \frac{d}{dt}\left(\rho_\varepsilon(X(-t,x) - Y(-t,y))\right)\,dx\,dy$$

par dérivation sous le signe somme,

$$= -\int\int_{\mathbb{T}^N\times\mathbb{T}^N} |x-y|\ \left(\mathbf{b}\,(X(-t,x)) - \mathbf{b}\,(Y(-t,y))\right)\,\cdot\,\nabla\rho_\varepsilon(X(-t,x) - Y(-t,y))\,dx\,dy$$

avec l'équation.

En utilisant de nouveau la propriété de groupe (iii) et la conservation de la mesure de Lebesgue (ii), nous obtenons donc :

$$\frac{d}{dt}\int\int_{\mathbb{T}^N\times\mathbb{T}^N} |X(t,x) - Y(t,y)|\ \rho_\varepsilon(x-y)\,dx\,dy$$

$$= \int\int_{\mathbb{T}^N\times\mathbb{T}^N} |X(t,x) - Y(t,y)|\ \left(\mathbf{b}\,(x) - \mathbf{b}\,(y)\right)\,\cdot\,\nabla\rho_\varepsilon(x-y)\,dx\,dy. \tag{9}$$

Notons maintenant $w(x,y) = |X(t,x) - Y(t,y)|$. Par construction, on a $w \in L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{T}^N)$. On applique alors à l'intégrale ci-dessus le raisonnement classique conduisant à la preuve du lemme de commutation [6, Lemma II.1]. Si on suppose momentanément w et $\mathbf{b}$ réguliers, alors cette intégrale tend vers 0 avec ε. En effet, $(\mathbf{b}\,(x) - \mathbf{b}\,(y)) \cdot \nabla\rho_\varepsilon(x-y)$ tend alors vers $-\delta_0(x-y)\,\mathrm{div}\,\mathbf{b}\,(x)$ au sens des distributions, qui est nulle à cause de la condition (3). D'autre part, on peut estimer :

$$\begin{aligned}
&\left| \iint_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{T}^N} w(x,y)\ (\mathbf{b}\,(x) - \mathbf{b}\,(y)) \cdot \nabla\rho_\varepsilon(x-y)\,dx\,dy \right| \\
&\qquad \leq \|w(x,y)\|_{L^\infty} \iint_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{T}^N} |\mathbf{b}\,(x) - \mathbf{b}\,(y)|\ |\nabla\rho_\varepsilon|\,(x-y)\,dx\,dy \\
&\qquad \leq \|w(x,y)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{T}^N)}\ \varepsilon^{-N} \iint_{|y-x| \leq C\varepsilon} \left| \frac{\mathbf{b}\,(x) - \mathbf{b}\,(y)}{\varepsilon} \right| |\nabla\rho_0|\,(x-y)\,dx\,dy \\
&\qquad \leq \|w(x,y)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{T}^N)}\ \|\nabla\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{T}^N)}\ \varepsilon^{-N} \iint_{|y-x| \leq C\varepsilon} \left| \frac{\mathbf{b}\,(x) - \mathbf{b}\,(y)}{\varepsilon} \right| dx\,dy \\
&\qquad \leq \mathcal{C}\ \|w(x,y)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{T}^N)}\ \|\mathbf{b}\,\|_{W^{1,1}(\mathbb{T}^N)}
\end{aligned} \tag{10}$$

où $\mathcal{C}$ dépend seulement de ρ_0, et notamment de $\|\nabla\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{T}^N)}$. De la même façon, on peut obtenir, pour tous $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, une majoration de (9) par

$$\begin{aligned}
&\|\nabla\rho_0\|_{L^\infty} \left(\varepsilon^{-N} \iint_{|y-x| \leq C\varepsilon} |w(x,y)|^p\ dx\,dy \right)^p \left(\varepsilon^{-N} \iint_{|y-x| \leq C\varepsilon} \left| \frac{\mathbf{b}\,(x) - \mathbf{b}\,(y)}{\varepsilon} \right|^q dx\,dy \right)^q \\
&\qquad \leq \mathcal{C}\ \|w(x,y)\|_{L^p(\mathbb{T}^N \times \mathbb{T}^N)}\ \|\mathbf{b}\,\|_{W^{1,q}(\mathbb{T}^N)}
\end{aligned} \tag{11}$$

On raisonne alors par densité. On approche w qui est dans L^∞par une suite de fonctions régulières w_n tendant localement vers w dans L^p pour un quelconque $1 \leq p < +\infty$. De même, on approche $\mathbf{b}$ par une suite de fonctions régulières $\mathbf{b}_m$ convergeant vers $\mathbf{b}$ dans $W^{1,1}$. On applique alors (10) à w et $\mathbf{b}_m - \mathbf{b}$, (11) à $w_n - w$ et $\mathbf{b}_m$, et on note la convergence de (9) vers 0 pour w_n et $\mathbf{b}_m$. En regroupant, on obtient ainsi que le membre de droite de (9) tend vers 0 avec ε pour $\mathbf{b}$ dans $W^{1,1}$ et w dans L^∞ quelconques. D'où l'on déduit l'unicité du flot énoncée dans le Théorème 1.2, avec donc une preuve ne faisant pas référence à (2).

3. Unicité sans l'hypothèse de groupe en temps

Nous nous autorisons maintenant à utiliser la forme eulérienne de l'équation (1). Nous allons démontrer l'unicité contenue dans le Théorème 1.2 mais pour un flot ne vérifiant pas nécéssairement la condition (iii) (i.e. (6)) de la Définition 1.1.

Considérons l'unique solution f de l'équation de transport

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{b} \cdot \nabla f = 0 \tag{12}$$

avec donnée *finale* $f(T,\cdot) = f_T$. Clairement, $f \in C([0,T], L^1_x)$. Nous régularisons alors f par une convolution en temps et en espace : soit $f_\varepsilon(t,x) = \int\int f(s,y)\rho_\varepsilon(x-y)\theta_\varepsilon(t-s)\,dy\,ds$, où $\theta_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\theta(\varepsilon^{-1}\,\cdot)$ avec $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\theta \geq 0$ $\int\theta = 1$. Par l'argument standard de régularisation de (2) (cette fois à la fois en temps et en espace), nous avons

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + \mathbf{b}\cdot\nabla f_\varepsilon = R_\varepsilon(t,x),$$

où $R_\varepsilon = -\int \theta_\varepsilon(t-s)\,[\rho_\varepsilon, \mathbf{b}\nabla]\,(\rho)\,(s,x)\,ds$ tend vers 0 dans $L^1_{t,x}$ (de même que le terme d'erreur supplémentaire $[\theta_\varepsilon, \mathbf{b}\cdot\nabla(f\star\rho_\varepsilon)]$ si $\mathbf{b}$ dépend du temps). La fonction f_ε étant (au moins) de classe $C^1_{t,x}$, on peut écrire, pour tout flot généralisé solution de (1) :

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(T, X(T,x)) - f_\varepsilon(0, X(0,x)) &= \int_0^T \frac{d}{dt} f_\varepsilon(t, X(t,x))\,dt \\ &= \int_0^T \left(\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + \mathbf{b}\nabla f_\varepsilon\right)(t, X(t,x))\,dt = \int_0^T R_\varepsilon(t, X(t,x))\,dt \end{aligned} \tag{13}$$

On intègre alors ceci en la variable x pour obtenir

$$\int |f_\varepsilon(T, X(T,x)) - f_\varepsilon(0,x)|\,dx \leq \int_0^T \int |R_\varepsilon(t, X(t,x))|\,dt\,dx = \|R_\varepsilon\|_{L^1_{t,x}}, \tag{14}$$

où l'on a utilisé la conservation de la mesure de Lebesgue par le flot pour évaluer le membre de droite. En laissant ε tendre vers 0, on obtient :

$$\int |f_T(X(T,x)) - f(0,x)|\,dx = 0. \tag{15}$$

En prenant successivement pour f_T les N champs coordonnés, on démontre donc $X_i(T,x) = f_i(0,x)$ où f_i est l'unique solution de l'équation de transport à donnée finale le i-ème champ coordonnée. Ceci prouve l'unicité du flot. On remarquera que la propriété de groupe (6) n'a pas été utilisée. On peut noter que ceci est d'une certaine manière *consistant* avec les travaux [1,4,5] où l'unicité du "flot lagrangien" (défini précisément dans ces travaux) ne repose pas sur la propriété de groupe, mais seulement sur les deux propriétés d'être solution et de conserver la mesure de Lebesgue (essentiellement). La propriété de groupe est alors, bien sûr, une *conséquence* de l'unicité et des propriétés ci-dessus.

Références

[1] L. Ambrosio, Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields, *Inventiones Mathematicae*, 158 (2004), 227-260.

[2] L. Ambrosio, M. Lecumberry & S. Maniglia, Lipschitz regularity and approximate differentiability of the DiPerna-Lions flow, *Rendiconti del Seminario Fisico Matematico di Padova*, 114 (2005), 29-50.

[3] L. Ambrosio, G. Crippa, Existence, uniqueness, stability and differentiability properties of the flow associated to weakly differentiable vector fields, *preprint*, 2006.

[4] G. Crippa, C. De Lellis, Estimates and regularity results for the DiPerna-Lions flow, preprint.

[5] G. Crippa, C. De Lellis, Regularity and compactness for the DiPerna-Lions flow, preprint.

[6] R.J. Di Perna and P.L. Lions, Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Invent. Math.*, 98(3) :511-547, 1989.

[7] C. Le Bris, P.L. Lions, Existence and uniqueness of solutions to Fokker-Planck type equations with irregular coefficients, preprint.

[8] P.L. Lions, Sur les équations différentielles ordinaires et les équations de transport, [On ordinary differential equations and transport equations], *C.R. Acad. Sc., Paris, Sér. I., Math.*, 326(7) :833-838, 1998.