

Mémoire présenté à l'Université d'Aix-Marseille
pour l'obtention de l'habilitation à diriger des recherches

Spécialité : Mathématiques

**Limite de champ moyen et propagation du chaos
pour des systèmes de particules,
Limites gyro-cinétique et quasi-neutre pour les plasmas.**

par

Maxime Hauray

soutenu publiquement le 12 Septembre 2014, après avis de :

Yann Brenier	Professeur à l'Ecole Polytechnique de Paris
Eric Carlen	Professeur à l'Université de Rutgers
Mario Pulvirenti	Professeur à l'Université de Rome 1

devant le jury composé de :

Yann Brenier	Professeur à l'Ecole Polytechnique de Paris
Eric Carlen	Professeur à l'Université de Rutgers (excusé)
José Carrillo	Professeur à l'Université d'Oxford
Philippe Ghendrih	Professeur à l'IRFM du CEA Cadarache
François Golse	Professeur à l'Ecole Polytechnique de Paris
Arnaud Guillin	Professeur à l'Université de Clermont-Ferrand
Anne Nouri	Professeur à l'Université d'Aix-Marseille

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Yann Brenier, Eric Carlen et Mario Pulvirenti pour avoir accepté d'écrire un rapport pour cette habilitation. Si je les ai sollicités, c'est parce que mes recherches s'inspirent souvent de leurs prolifiques travaux – que j'ai souvent passé de longues heures à assimiler – et je les remercie d'avoir accepté cette tâche ingrate. Mes travaux sur l'analyse fonctionnelle pour les systèmes de particules doivent beaucoup à Eric Carlen, ceux sur limites de champ moyen à Mario Pulvirenti, et ceux sur la limite quasi-neutre et le transport optimal à Yann Brenier. En passant, j'en profite pour remercier Mario Pulvirenti (et son collègue Carlo Marchioro) pour m'avoir accueilli à Rome lors d'un court post-doc juste après ma thèse.

Mes remerciements vont également à José Carrillo, François Golse, Arnaud Guillin, Philippe Ghendrih, Anne Nouri (et encore Yann Brenier), les membres du Jury pour leur disponibilité et leur intérêt pour mes travaux. En particulier, je remercie Jose Carrillo pour nos collaborations et discussions très enrichissantes, qui m'ont fait découvrir une grande variété de modèles cinétiques (ou non) issus de la biologie ou de l'écologie; François Golse, dont les résultats sur les limites en grand nombre de particules, et les limites hydrodynamiques (ou encore les limites gyro-cinétiques) sont évidemment des références clés pour mes travaux; Arnaud Guillin, dont les travaux sur les systèmes de particules stochastiques, m'ont fait comprendre que j'avais intérêt à apprendre un minimum de probabilités pour m'ouvrir d'autres directions de recherche; Anne Nouri, pour notre collaboration fructueuse et enrichissante sur les plasmas de fusion, et parce travailler à ses côtés dans notre micro-équipe (ex groupe) « cinétique » du groupe (ex équipe) d'Analyse Appliquée de l' IMM (ex LATP) a toujours été simple et agréable; Philippe Ghendrih, physicien isolé dans ce jury de « matheux », également pour notre collaboration et en particulier pour ses explications patientes des problèmes physiques rencontrés sur les tokamak, malgré nos yeux de mathématiciens toujours désespérés par le manque de régularité.

Ensuite, je remercierai mes différents collaborateurs. En commençant par le plus ancien Pierre-Emmanuel Jabin, grâce à qui j'avance (lentement) sur le difficile chemin de la compréhension des systèmes de particules en interaction singulière, et ce malgré une distance de plus en plus grande entre nos lieux de travail respectifs. Et je ne voudrais pas oublier l'aide non négligeable de Julien Barré dans ce domaine. Je citerais aussi Stéphane Mischler, sans qui des domaines entiers de l'analyse fonctionnelle et d'analyse des EDP me seraient à jamais restés inaccessibles, et Nicolas Fournier, qui m'a appris quelques ruses de probabilistes qui me permettent presque de passer pour un

probabiliste chez les analystes (le contraire étant plus simple pour moi, par formation). Sur les problèmes concernant les plasmas de fusion, j'ai déjà cité plus haut Anne Nouri et Philippe Ghendrih, qui m'ont initié à ce domaine brûlant d'actualité, mais il ne faudrait pas oublier Mihai Bostan, avec qui j'ai aussi beaucoup discuté de ces problèmes en apprenant beaucoup.

Ensuite, je remercie Claudia Negulescu de m'avoir un jour expliqué les problèmes théoriques et numériques autour de la décohérence quantique qu'elle étudiait, ce qui m'a entrouvert la porte de ce domaine fascinant. Quant à Riccardo Adami, notre collaborateur outre-alpin, je le remercie également pour m'avoir fait découvrir l'analyse fonctionnelle à la mode italienne. Merci également à Christophe Gomez, qui m'a tiré récemment plusieurs épines quantiques du pied grâce à sa maîtrise des martingales.

Enfin, merci également à Daniel Han-Kwan, avec qui j'ai expérimenté récemment une collaboration quasiment entièrement électronique (sur des questions de neutralité électronique) qui s'est avérée très fructueuse. Et également à Claude LeBris et mon directeur de thèse Pierre-Louis Lions pour notre collaboration plus ancienne dans la lignée de mes travaux de thèse sur les EDO peu régulières.

Enfin, sans être des « vrais » collaborateurs, je tenais à remercier les collègues non marseillais avec qui j'ai eu d'intéressantes discussions : je pense notamment à Florian Méhats et Mohamed Lemmou de Rennes et également mes camarades de promotion qui ont choisi le même domaine que moi : François Bolley et le désormais célèbre Clément Mouhot.

Il est temps pour moi de remercier mes collègues marseillais. Je commencerai par les membres de l'équipe d'analyse appliquée. Je ne me risquerai pas à faire une liste ici, par peur d'en oublier, mais je tenais à dire que j'apprécie d'en faire partie, notamment pour l'atmosphère sympathique qui y règne. Avant d'oublier, je dois quand même en citer un puisqu'il a accepté d'être mon tuteur d'HDR : merci donc à Thierry Gallouët. Ensuite, j'en profite aussi pour remercier les membres de l'équipe de probabilités, qui tolèrent depuis quelques années que je squatte leur séminaire sans trop ronchonner. Et plus généralement tous les collègues du laboratoire que je côtoie, dans cet IMM (ex LATP) globalement bien agréable.

Il est maintenant temps de remercier mes amis proches (parfois lointains) avec une mention spéciale à Jib et Sib qui vont le déplacement pour l'occasion, mes parents, et ma petite famille (Aurélien, Etienne et Adèle) pour leur soutien indéfectible, sans parler de leur soutien logistique pour l'organisation de la soutenance.

Si jamais j'ai oublié quelqu'un, ce qui est fort possible voire probable, j'espère qu'il ne m'en tiendra pas rigueur.

Pour conclure, même si ce n'est pas un remerciement, je tiens à dire que j'aurais évidemment une pensée pour mon frère Vincent pendant cette soutenance. Même si ce n'est peut-être pas l'œuvre la plus appropriée, autant que possible je lui dédie ce mémoire et la soutenance.

Sommaire

1	Limite de champ moyen, propagation du chaos pour des systèmes de particules déterministes.	7
1.1	Un cas simple, l'équation de Vlasov-Poisson en dimension 1 . . .	11
1.2	Interactions avec singularité faible en dimension 3	12
1.3	Interactions avec singularité forte en dimension 3	14
1.4	Chaos et champ moyen pour des systèmes du premier ordre. . .	17
2	Outils d'analyse fonctionnelle pour la propagation du chaos.	20
2.1	Une quantification de l'équivalence des « différents » chaos. . .	20
2.2	Chaos entropique et chaos au sens de Fisher	22
2.3	Généralisation à la sphère de Kac \mathcal{S}^N	22
2.4	Hewitt et Savage quantifié, entropie et information de Fisher sur les mélanges.	25
3	Propagation du chaos pour des modèles stochastiques.	29
3.1	Le modèle des tourbillons aléatoires.	29
3.2	Vers des modèles particuliers de type Langevin.	32
4	Limites quasi-neutre ou gyro-cinétique pour les plasmas	34
4.1	Limite quasi-neutre en dimension 1	34
4.2	Limites gyro-cinétiques avec rayon de Larmor fini	42
5	Décohérence via un modèle quantique simple de collision	47
5.1	Un modèle simplifié pour décrire une collision.	47
5.2	Vers des modèles de décohérence en environnement aléatoire. . .	53

Résumé.

Dans ce mémoire sont présentés mes travaux de recherche entrepris depuis la fin de ma thèse de doctorat, dans les domaines des limites de champ moyen et de la propagation du chaos pour des systèmes de particules, des limites gyro-cinétique et quasi-neutre en physique des plasmas, et de la décohérence quantique (pour un modèle très élémentaire).

Abstract.

In this report are presented my research works, starting from the end of my PhD, in the domains of mean-field limit and propagation of chaos for particle systems, gyro-kinetic and quasi-neutral limits, and quantum decoherence (for a very elementary model).

Chapitre 1

Limite de champ moyen, propagation du chaos pour des systèmes de particules déterministes.

Ce sujet constitue mon domaine principal de recherche depuis ma thèse. De nombreux modèles issus de la physique ou de la biologie voire des sciences sociales mettent en jeu un grand nombre de particules (ou de systèmes variés ou d'individus¹).

On considère donc ces N particules identiques et caractérisées par leur position X_i^N et leur vitesse V_i^N . On notera aussi $Z_i^N = (X_i^N, V_i^N)$ le couple position-vitesse de la i -ème particule, et $\mathcal{Z}^N = (Z_1^N, \dots, Z_N^N)$. Ces particules sont en interaction via une force F à deux corps, et les lois fondamentales de la dynamique s'écrivent sous forme d'un système de $2N$ équations différentielles ordinaires (EDO) :

$$\forall i \leq N, \quad \dot{X}_i^N = V_i^N, \quad \dot{V}_i^N = -\frac{1}{N} \sum_{j \neq i} F(X_i^N - X_j^N). \quad (1.1)$$

On considérera aussi le cas où des bruits indépendants agissent sur les vitesses de particules, ce qui amène aux équations de Langevin :

$$\forall i \leq N, \quad dX_i^N = V_i^N dt, \quad dV_i^N = -\frac{1}{N} \sum_{j \neq i} F(X_i^N - X_j^N) dt + dB_t^i, \quad (1.2)$$

où les B^i sont des Browniens indépendants.

1. mais on utilisera dans ce rapport le terme de particules de manière générique.

Il faut noter que l'on peut généraliser à des forces $F(X_i, V_i, X_j, V_j)$ dépendant de manière très générale des positions et des vitesses (voire des forces à plus de deux particules), ce qui est particulièrement intéressant dans les modèles issus de la biologie : on se reportera à la partie 1.3 pour plus de détails. Pour la clarté de cette introduction, on se limitera au cas d'une force $F(X_i - X_j)$. En général, les forces physiquement intéressantes ont une singularité en zéro : on peut penser aux forces d'interaction Coulombienne (pour les plasmas) ou gravitationnelle (pour les galaxies). Dans ce cas, il faut remarquer qu'il n'existe pas de moyen simple d'assurer l'existence et l'unicité du système d'EDO (1.1) (il en va de même pour le système d'EDS (1.2)). Cependant, dans tous les cas particuliers dont nous allons parler, il existe un moyen de démontrer l'existence de solutions continues au système (1.1), et l'existence suffit généralement pour étudier la limite en grand nombre de particules.

Limite en grand nombre de particules. Un problème important est de comprendre le comportement quand N tend vers l'infini de ce genre de système. Pour cela, il est très utile d'introduire les mesures empiriques associées :

$$\mu_N(t) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{Z_i^N(t)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(X_i^N(t), V_i^N(t))}.$$

Sous l'hypothèse $F(0) = 0$, les mesures empiriques associées aux solutions de (1.1) sont des solutions faibles de l'équation de Vlasov-champ moyen ci-dessous :

$$\partial_t f + v \cdot \partial_x f - \partial_x E(t, x) \cdot \partial_v f = 0, \quad (1.3)$$

$$E(t, x) = [K * \rho(t)](x) = \int F(x - y) f(t, y, w) dy dw,$$

où f désigne cette fois-ci une densité sur l'espace des phases à une particule : $f(t, x, v)$. Cette équation est connue depuis Boltzmann – on devrait d'ailleurs l'appeler équation de Boltzmann sans collision [Hén82] – et a été utilisée par l'astrophysicien Jeans en 1915, et par le physicien des plasmas Vlasov en 1938. Si on néglige les problèmes posés par la singularité de la force, un raisonnement « heuristique » montre que c'est l'équation que l'on doit obtenir dans la limite d'un grand nombre de particules.

Convergence rigoureuse ou limite de champ moyen. Le fait que les mesures empiriques vérifient l'équation de Vlasov-champ moyen (1.3) suggère une stratégie pour prouver la convergence rigoureuse pour N grand. Choisissons une suite (déterministe) de configurations initiales $\mathcal{Z}^N(0)$ et supposons

que les mesures empiriques associées $\mu_N^Z(0)$ convergent faiblement vers une distribution donnée f^0 :

$$\mu_N^Z(0) \rightharpoonup f^0(x, v).$$

On suppose que f^0 est suffisamment régulière pour qu'il existe une unique solution $f(t)$ globale (voire éventuellement locale) à l'équation (1.3) dans un espace adéquat. On peut alors se demander si pour tout temps $t \geq 0$, $\mu_N^Z(t)$ converge faiblement vers la solution $f(t)$. En d'autres termes, le diagramme ci-dessous est-il commutatif ?

$$\begin{array}{ccc} \mu_N^Z(0) & \xrightarrow{\text{cvg}} & f(0) \\ \text{Npart} \downarrow & & \downarrow \text{VP} \\ \mu_N^Z(t) & \xrightarrow{\text{cvg?}} & f(t) \end{array}$$

Dans la suite, on parlera de limite de champ moyen à propos de cette question de convergence pour tout temps, pour une suite précise (déterministe) de données initiale $Z^N(0)$, ou de manière équivalente $\mu_N^Z(0)$. C'est bien sûr un problème purement déterministe.

Remarquons qu'il est fondamental, pour que ce problème puisse être formulé, d'avoir un résultat d'unicité pour l'équation limite (1.3).

Propagation du chaos moléculaire. Mais du point de vue de la physique statistique, il est plus pertinent de choisir des conditions initiales aléatoires, en d'autres terme de dire que $Z^N(0)$ (ou $\mu_N^Z(0)$) est une variable aléatoire, de loi donnée. Comme ce problème est un problème hors équilibre, on n'a pas de mesure d'équilibre standard (Gibbs, canonique ou autre) à utiliser. Comme dans un modèle de champ moyen, on s'attend à avoir de faibles corrélations entre les particules, on choisit des données initiales avec des particules peu ou pas corrélées, et on cherche à montrer que l'indépendance "approchée" des particules se propage au cours du temps.

Pour préciser les choses, on définit la notion de suite *chaotique* de distributions sur un espace $E = \mathbb{R}^d$ ou $C([0, T], \mathbb{R}^d)$.

Définition 1.1 (Suite chaotique de probabilités.). *Une suite $(F^N)_{N \in \mathbb{N}}$ de mesures de probabilité symétriques (les V.A. associées sont échangeables) sur E^N est dite f -chaotique, pour une mesure de probabilité f sur E si et seulement si une des trois conditions équivalentes ci-dessous est satisfaite :*

- (i) *la suite des 2-marginales $F_2^N \rightharpoonup f \otimes f$ quand $N \rightarrow +\infty$;*
- (ii) *pour tout $j \geq 1$, la suite des j -marginales $F_j^N \rightharpoonup f^{\otimes j}$ quand $N \rightarrow +\infty$;*
- (iii) *la variable aléatoire mesure empirique associée μ_N^Z converge en loi vers f quand $N \rightarrow \infty$.*

Cette notion a été formalisé par Kac [Kac56] et remonte à Boltzmann et sa « Stosszahl Ansatz ». Pour plus de détail, on se référera au fameux cours de Sznitman [Szn91], ainsi qu'à un article [HM14] (détaillé à la section 2.1) écrit en collaboration avec Stéphane Mischler pour une version quantifiée de cette équivalence.

Attention, on parle de chaos *moléculaire* ici pour dire que si l'on choisit deux particules dans notre système microscopique, elles sont quasiment indépendantes. Cela ne correspond pas au sens le plus répandu de chaos, qui désigne souvent une grande sensibilité aux conditions initiales dans un système dynamique (et pas forcément en grande dimension).

Choisissons maintenant une suite F_0^N de conditions initiales f -chaotique. Laissons évoluer les systèmes jusqu'au temps t . Si la suite $F^N(t)$ des distributions au temps t est aussi $f(t)$ -chaotique pour un certain $f(t)$, on parle alors de propagation du chaos. Bien sûr cette distribution $f(t)$ ne peut-être quelconque : elle doit être la solution du problème limite attendu, mais ceci est plutôt une conséquence de la propagation du chaos, en tout cas dans les problèmes de champ moyen. Comme toutes les mesures empiriques sont solutions de l'équation de Vlasov-champ moyen (1.3), on s'attend aussi à ce que la limite, si elle existe, soit une solution de cette équation.

La propagation du chaos intéresse surtout les probabilistes, à propos de systèmes stochastiques, dont l'évolution elle-même est aléatoire. Mais il faut toutefois noter l'important problème de la limite du modèle déterministes des sphères dures vers l'équation de Boltzmann en temps petit, avec la preuve de Landford, complétée récemment par Gallagher, Saint-Raymond et Texier [GSRT14]. En fait, la question de la propagation du chaos est aussi pertinente en général dans le cas de systèmes déterministes. Certes, dans les cas simples, où l'on sait prouver la limite de champ moyen sans condition sur les données initiales (Z_0^N où $\mu_N^Z(0)$), la propagation du chaos devient une conséquence simple de la limite de champ moyen : voir par exemple le cas de l'équation de Vlasov-Poisson en dimension 1 dans la section suivante 1.1. Mais dans les cas difficiles, le lien n'est pas si simple. L'exemple le plus révélateur est celui des sphères dures, pour lequel on n'étudie jamais la limite de champ moyen, mais toujours directement la propagation du chaos avec des conditions initiales aléatoires. L'équation de Vlasov-champ moyen en dimension 3, détaillé dans la sous-section 1.2 est un autre exemple : on y montre un résultat de limite de champ moyen sous certaines conditions sur les données initiales, et pour en déduire la propagation du chaos, il faut encore montrer que ces conditions sont presque sûrement vérifiées quand on part de données initiales adéquates (des particules vraiment indépendantes).

1.1 Un cas simple, l'équation de Vlasov-Poisson en dimension 1

Je résume ici les résultats obtenus dans la note pour le séminaire Laurent Schwartz [Hau13]. Pour simplifier l'exposé, on se contentera de donner des résultats sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Des résultats similaires peuvent-être obtenus dans tout l'espace, à condition de prendre en compte des moments en position.

Sur le tore, l'équation de Poisson est associée au noyau K ci-dessous :

$$K(x) := -\frac{1}{2} - x \text{ si } x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right), \quad \frac{1}{2} - x \text{ si } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad 0 \text{ si } x = 0, \quad (1.4)$$

et la force d'interaction est donnée par $F(x) = \pm K(x)$, suivant que l'on considère le cas attractif ou répulsif.

Dans cette note [Hau13], j'ai démontré quelques résultats concernant le système (1.1) dans ce cas, et la limite en grand nombre de particules vers l'équation de Vlasov-Poisson (1.3). Précisément :

- L'existence pour toutes conditions initiales d'une solution (non-unique) au système (1.1), en utilisant la théorie des inclusions différentielles ordinaires [Fil88];
- L'existence pour toute donnée initiale mesure avec un moment d'ordre 1 en vitesse d'une solution faible de l'équation (1.3);
- Un théorème de stabilité fort-faible, énoncé ci-dessous, qui implique la limite de champ moyen, et la propagation du chaos.

Théorème 1.1 (Stabilité fort-faible). *Supposons que f_t est une solution de l'équation de Vlasov-Poisson (1.3) (en 1D) avec une densité ρ_t bornée pour tout $t \geq 0$. Alors, pour toute solution mesure ν_t (globale en temps) de cette même équation, avec un moment d'ordre 1 en vitesse fini, on a l'estimation de stabilité ci-dessous pour tout :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad W_1(f_t, \nu_t) \leq e^{a(t)} W_1(f_0, \nu_0), \quad \text{avec } a(t) := \sqrt{2}t + 8 \int_0^t \|\rho_s\|_\infty ds,$$

où W_1 désigne la distance de Monge-Kantorovitch-Wasserstein (MKW) d'ordre 1.

Je renvoie au très clair livre de Villani [Vil03] pour les définitions et propriétés des distances MKW. La limite de champ moyen en découle de manière immédiate : il suffit d'appliquer ce théorème aux mesures empiriques μ^N , dont on rappelle qu'elles sont solutions de l'équation de Vlasov-Poisson (1.3). On obtient le corollaire suivant :

Corollaire 1.1 (du Théorème 1.1). *Sous les mêmes hypothèses que dans le Théorème 1.1, on a pour toute solution \mathcal{Z}^N du système de N particules (1.1) avec mesure empirique initiale $\mu_{\mathcal{Z}}^N(0)$, l'estimation de stabilité ci-dessous :*

$$W_1(\mu_{\mathcal{Z}}^N(t), f_t) \leq e^{a(t)} W_1(\mu_{\mathcal{Z}}^N(0), f_0) \quad \text{où} \quad a(t) := \sqrt{2}t + 8 \int_0^t \|\rho_s\|_\infty ds. \quad (1.5)$$

La propagation du chaos s'en déduit également de manière très simple. Il suffit de prendre l'espérance dans l'inégalité (1.5).

Corollaire 1.2 (du Théorème 1.1). *Sous les mêmes hypothèses que dans le Théorème 1.1, on a pour toute solution \mathcal{Z}^N du système de N particules (1.1) avec mesure empirique initiale aléatoire $\mu_{\mathcal{Z}}^N(0)$ l'estimation de stabilité ci-dessous :*

$$\mathbb{E} \left[W_1(\mu_{\mathcal{Z}}^N(t), f_t) \right] \leq e^{a(t)} \mathbb{E} \left[W_1(\mu_{\mathcal{Z}}^N(0), f_0) \right],$$

où l'espérance est prise par rapport à la mesure sur les conditions initiales.

Dans ce cadre 1D, on peut aussi montrer la propagation du chaos entropique, une notion plus forte de chaos définie dans la section 2.2.

1.2 Interactions avec singularité faible en dimension 3

Je résume ici les résultats obtenus en collaboration avec Pierre-Emmanuel Jabin dans l'article à paraître [HJ11]. Par « faible », j'entends des forces d'interaction qui vérifient

$$\exists \alpha < 1, \exists C > 0, \quad \forall x \neq 0, \quad |F(x)| \leq \frac{C}{|x|^\alpha}, \quad |\nabla F(x)| \leq \frac{C}{|x|^{\alpha+1}}. \quad (1.6)$$

Je parle de singularité faible dans ce cas, car si la force a une vraie singularité (explosion) en zéro, celle-ci est suffisamment faible pour que le potentiel associé, s'il existe, reste continu.

Il est important de remarquer que tous les résultats obtenus sous cette hypothèse sont valables pour des interactions quelconques : attractives, répulsives ou même sans potentiel associé. En fait, dans ces cas « faiblement » singuliers, il n'est pas simple d'utiliser le caractère attractif ou répulsif de la force.

Dans ce cas, le théorème ci-dessous, démontré dans [HJ11], montre que sous certaines conditions peu restrictives, la limite de champ moyen est bien vérifiée.

Théorème 1.2 (Mean-field limit). *Soit une force d'interaction F vérifiant (1.6) avec $0 < \gamma < 1$. Supposons que $f^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^6)$ a un support compact et une masse totale égale à 1, et désignons par f l'unique solution bornée à support compact (globale en temps) de l'équation de Vlasov-champ moyen (1.3) (son existence et son unicité sont assurées par des résultats classiques).*

Supposons que les conditions initiales déterministes $(Z_i^N(0))_{i \leq N}$ sont telles que pour tout N , il existe une solution globale au système (1.1), et que les mesures empiriques initiales μ_N^0 satisfont :

i) Pour une constante C_∞ indépendante de N ,

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^6} N^\gamma \mu_N^0 \left(B_6(z, N^{-\frac{\gamma}{6}}) \right) \leq C_\infty, \quad \text{et} \quad \|f_0\|_\infty \leq C_\infty;$$

ii) Pour un $R_0 > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\text{Supp} \mu_N^0 \subset B_6(0, R_0)$;

iii) pour un certain $r \in (0, r^)$ où $r^* := \frac{d-1}{1+\alpha}$,*

$$\inf_{i \neq j} |(X_i^0, V_i^0) - (X_j^0, V_j^0)| \geq N^{-\gamma \frac{1+r}{6}}.$$

Alors pour tout $T > 0$, il existe deux constantes C_0, C_1 telles que pour $N \geq e^{C_1 T}$ l'estimation ci-dessous a bien lieu :

$$\forall t \in [0, T], \quad W_1(\mu_N(t), f(t)) \leq e^{C_0 t} \left(W_1(\mu_0, f_0) + 2 N^{-\frac{\gamma}{6}} \right). \quad (1.7)$$

C'est un résultat de type limite de champ moyen, car il est valable pour des données initiales Z_0^N déterministes, mais il n'est pas incondtionnel. Il ne suffit pas que la suite des mesures empiriques initiales converge vers f^0 pour obtenir la limite de champ moyen, il faut également que les hypothèses *i)* de bonnes répartitions, *ii)* de support, et *iii)* de borne sur la distance minimale inter-particules soient vérifiées. Et donc pour en déduire un résultat de propagation du chaos, il faut montrer que ces hypothèses sont suffisamment faibles pour être vérifiées avec une grande probabilité lorsque l'on tire des particules de manière indépendantes. C'est effectivement le cas si on choisit bien les paramètres, et on obtient le résultat suivant :

Théorème 1.3. *Supposons que F satisfait la condition (1.6). Il existe alors deux réels positifs $\gamma \in (0, 1)$ et $s \in \mathbb{R}^+$ dépendant seulement de (d, α) , tel que :*

- *Si $f^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^6)$ a un support compact et une masse totale égale à 1, et en désignant par f l'unique solution bornée à support compact (globale en temps) de l'équation de Vlasov-champ moyen (1.3) ;*

- *Si pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, μ_N désigne les mesures empiriques associées aux solutions de l'ODE (1.1) avec positions-vitesses initiales $Z^0 = (X_i^0, V_i^0)_{i \leq N}$ aléatoires de loi $(f^0)^{\otimes N}$;*

Alors pour tout $T > 0$, il existe trois constantes positives C_0 , C_1 et C_2 telles que si $N \geq e^{C_1 T}$,

$$\mathbb{P}\left(\exists t \in [0, T], W_1(\mu_N^z(t), f(t)) \geq 3e^{C_0 t} N^{-\frac{\gamma}{2d}}\right) \leq \frac{C_2}{N^s}. \quad (1.8)$$

Même si ces théorèmes concernent toujours le même type de singularité que dans notre précédent travail [HJ07], ils contiennent d'importantes améliorations. D'abord, nous avons introduit de nouveaux outils qui simplifient grandement les preuves. Ensuite, la conditions du résultat de limite de champ moyen sur la distance minimale inter-particules a été affaiblie de manière importante, et c'est ce qui permet d'en déduire maintenant la propagation du chaos.

1.3 Interactions avec singularité forte en dimension 3

Par « fort », j'entends des forces d'interaction qui vérifient :

$$\exists \alpha \in (1, 2), \exists C > 0, \quad \forall x \neq 0, \quad |F(x)| + |x| |\nabla F(x)| \leq \frac{C}{|x|^{\alpha+1}}. \quad (1.9)$$

Je parle de singularité forte dans ce cas, car cette fois-ci, le potentiel associé, s'il existe, possède lui aussi une singularité.

Des résultats généraux avec une régularisation à courte portée. Dans l'article [HJ11] écrit en collaboration avec Pierre-Emmanuel Jabin, nous donnons des résultats similaires aux théorèmes 1.2 et 1.3, valables pour les interactions fortement singulières du type (1.9), à condition de régulariser l'interaction en dessous d'un certain seuil $\varepsilon(N)$:

$$\varepsilon(N) \gg N^{-\gamma}, \quad \text{avec} \quad \gamma := \frac{1}{6} \min\left(\frac{1}{\alpha-1}, \frac{5}{\alpha}\right).$$

Ce résultat ne dit rien du cas le plus intéressant, celui de l'interaction Coulombienne ou gravitationnelle, qui correspond à $\alpha = 2$ dans (1.9), mais il est plus intéressant pour α proche de 1. En effet, dans ce cas, on voit que l'on peut quasiment utiliser un cut-off de l'ordre de $N^{-\frac{5}{6}}$, une échelle très petite, à comparer par exemple à la distance moyenne entre particules voisines de l'ordre de $N^{-\frac{1}{3}}$, et à la distance minimal entre particules de l'ordre de $N^{-\frac{2}{3}}$. Un raisonnement probabiliste heuristique fait penser que cette régularisation sera très peu « active ». Malheureusement, dans ce système contenant

de nombreuses particules corrélées, nous ne savons pas estimer de manière rigoureuse combien de particules sont concernées par la régularisation. Et ensuite même si nous arrivions à faire cela, nos techniques ne permettent ni de contrôler la trajectoire d'une particule après qu'elle ait « vu » la régularisation, ni de négliger son influence sur les autres. On pourra se référer à [BJ08] pour un résultat de ce type dans le cas plus simple où le potentiel est nul en dehors d'un voisinage de 0 (dépendant de N), avec éventuellement une forte singularité en ce point.

Un résultat de stabilité sans régularisation. Dans l'article en collaboration avec Julien Barré et Pierre-Emmanuel Jabin [BHJ10], nous montrons des résultats valables pour des interactions dérivant d'un potentiel $F = -\nabla\phi$, avec ϕ minoré avec une singularité répulsive en zéro, et tel que $\nabla\phi$ vérifie (1.9). Par exemple $\phi(x) = |x|^\kappa$ avec $\kappa \in (-1, 0)$. Dans ce cas potentiel, on peut introduire le Hamiltonien H_N associé au système (1.1)

$$H_N(\mathcal{Z}^N) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |V_i^N|^2 + \frac{1}{2N} \sum_{i \neq j} \phi(|X_i^N - X_j^N|).$$

Dans cet article, on se place sur le tore \mathbb{T}^3 (pour les positions) pour simplifier le problème. En utilisant les techniques introduites par Messer et Sphon [MS82], et améliorées par Caglioti, Lions, Marchioro et Pulvirenti [CLMP92, CLMP95], on peut montrer que pour tout $\beta > 0$, la mesure de Gibbs ν_β^N :

$$d\nu_\beta^N(\mathcal{Z}^N) = \frac{1}{\mathcal{B}_\beta^N} e^{-\beta H(\mathcal{Z}^N)} d\mathcal{Z}^N, \quad \mathcal{B}_\beta^N = \int_{\mathbb{T}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}} e^{-\beta H(\mathcal{Z}^N)} d\mathcal{Z}^N,$$

est bien définie, et que pour β fixé, la suite des mesures de Gibbs (ν_β^N) est γ_β -chaotique, avec

$$\gamma_\beta(x, v) = \gamma_\beta(v) = (2\pi\beta)^{-\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{v^2}{2}}$$

la Maxwellienne de température inverse β , uniforme en position.

La propagation du chaos est assez évidente dans ce cas : la mesure de Gibbs est une mesure stationnaire pour le système d'EDO (1.1), et la Maxwellienne γ_β est une solution stationnaire de l'équation de Vlasov-champ moyen (1.3).

Mais nous avons démontré un résultat de stabilité plus précis. On considère une mesure Π^N sur $(\mathbb{T}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N})^2$ telle que :

i) sa première marginale est ν_β^N ,

ii) sa seconde marginale Π_2^N vérifie $\Pi_2^N \leq C\nu_{\beta'}^N$ pour un $\beta' \leq \beta$.

Π_2^N est en faite une « déformation » de la mesure de Gibbs μ_β^N . On part de conditions initiales \mathcal{Z}_0^N distribuées selon cette mesure, et on les modifie (légèrement) en $\mathcal{Z}_0^{N'}$, et Π^N est le plan de transport utilisé pour passer de μ_β^N à Π_2^N .

Ensuite, on choisit un $\lambda > 0$ et on définit

$$Q_N^\lambda(t) := \iint \ln\left(1 + N^\lambda \|\mathcal{Z}^N(t) - \mathcal{Z}^{N'}(t)\|_1\right) \Pi^N(d\mathcal{Z}_0, d\mathcal{Z}'_0). \quad (1.10)$$

avec la notation $\|\delta^N\|_1 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\delta_i^N|$. Alors on a le résultat de stabilité suivant :

Théorème 1.4. *Supposons que ϕ est minoré, que $\lambda \leq 1 - \frac{\alpha}{3}$ et que $\nabla\phi$ vérifie (1.9) pour un certain $\alpha \in (1, 2)$. Alors, il existe une constante C indépendante de N telle que la quantité Q_N^λ définie en (1.10) vérifie l'inégalité suivante*

$$Q_N^\lambda(t) \leq Q_N^\lambda(0) + Ct.$$

Bien sûr, ce théorème n'est utile que lorsque $Q_N^\lambda(0) < +\infty$. C'est le cas si $\mathcal{Z}_0^{N'}$ est en moyenne à une distance inférieure à $N^{-\lambda}$ de \mathcal{Z}_0^N . On peut noter que λ peut toujours être choisit supérieur à $\frac{1}{3}$, même lorsque α est proche de 2. Le résultat est donc plus fin qu'un résultat de comparaison à la limite Maxwellienne γ_β puisque pour la distance de MKW d'ordre 1 (qui est la généralisation de la norme discrète $\|\cdot\|_1$ pour les mesures empiriques), on a $W_1(\mu_{\mathcal{Z}}^N, \gamma_\beta)$ d'ordre $N^{-\frac{1}{6}}$. Il montre que l'ordre des perturbations, même petit, peut-être préservé par la dynamique.

Il reste à comprendre comment construire des perturbations admissibles de la mesure de Gibbs (et donc des plan de transports Π^N). Deux exemples sont donnés dans l'article : on perturbe dans les deux cas les vitesses, de manière aléatoire ou non. Par contre, perturber les positions est plus délicat car il faut veiller à ne pas trop modifier l'énergie potentielle pour préserver la condition *ii*).

Il serait très appréciable de pouvoir généraliser ce résultat à d'autres mesures que la mesure de Gibbs. Mais cela semble bien délicat, car ce résultat repose sur des bornes fortes sur les marginales, qu'on ne connaît que dans le cas de la mesure de Gibbs (ou éventuellement de la mesure micro-canonique).

Modèles de comportements collectifs en biologie Avec José Carillo et Young-Pil Choi, nous sommes en train d'adapter les techniques utilisées pour l'équation de Vlasov-Champ moyen en dimension 3 à des modèles de

type Cucker-Smale, modélisant des mouvements collectifs en biologie, avec des forces singulières. Par exemple, nous pouvons traiter des forces du type

$$F(X_1, X_2, V_1, V_2) = \frac{V_1 - V_2}{|X_1 - X_2|^\alpha},$$

avec des $\alpha < 1$. L'intérêt est qu'on est capable de travailler avec des densités d'individus (en position-vitesse) dans L^p plutôt que dans L^∞ . Les techniques se dégradent, mais fonctionnent encore, à condition que p soit suffisamment grand.

1.4 Chaos et champ moyen pour des systèmes du premier ordre.

Par système du premier ordre, je veux dire que l'on s'intéresse non plus à des particules avec position et vitesse, mais uniquement à des points caractérisés par leur position. On considère donc N points X_i de \mathbb{R}^d , en interaction via un noyau F (avec éventuellement un paramètre a_i qui intervient dans le calcul des actions). Le système d'EDO s'écrit alors :

$$\forall i \leq N, \quad \dot{X}_i^N = \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} a_i^N a_j^N K(X_i^N - X_j^N). \quad (1.11)$$

Le Modèle des tourbillons. Un exemple typique est donné par le modèle des tourbillons en dimension 2, où K est le noyau de Biot-Savard

$$K_{BS}(x) := \nabla^\perp \left(\frac{1}{2\pi} \ln |x| \right) = \frac{x^\perp}{2\pi|x|^2}. \quad (1.12)$$

Dans ce cas, a_i peut avoir un signe positif ou négatif suivant que le tourbillon tourne dans un sens ou dans l'autre. Le modèle limite naturel est l'équation du tourbillon (ou d'Euler en formulation tourbillon)

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0, \quad u(t) := K_{BS} * \omega(t). \quad (1.13)$$

Il est très difficile d'obtenir des résultats de limite de champ moyen pour l'équation du tourbillon. Schochet a réussi à démontrer dans [Sch96] en utilisant des travaux de Delort que de toute suite de mesures empiriques $\mu_{\mathcal{X}}^N$ associées à des solutions \mathcal{X}^N de (1.11), on peut toujours extraire une sous-suite qui converge vers une solution mesure de l'équation de tourbillon (1.13). Mais cela ne suffit pas pour montrer la propagation du chaos, pour l'équation du

tourbillon, car le seul résultat d'unicité connu est pour des tourbillons bornés ou presque [Jud63, Jud95]. Et au vu des résultats de non-unicité pour l'équation d'Euler obtenus par Shnirelman [Shn97], Scheffer [Sch93] et simplifiés par De Lellis et Székelyhidi [DLS09], il est probable qu'on puisse construire des solutions mesures non uniques à l'équation du tourbillon (1.13).

Dans l'article [Hau09], j'ai prouvé le résultat suivant, qui s'applique à des cas similaires à celui des vortex mais moins singuliers. Le noyau K doit précisément vérifier la condition suivante :

$$\operatorname{div} K = 0, \quad \exists \alpha < d-1, \exists C > 0, \text{ t.q. } |K(x)| + |x| |\nabla K(x)| \leq \frac{C}{|x|^\alpha}. \quad (1.14)$$

Le théorème précis – énoncé en dimension d quelconque – est le suivant :

Théorème 1.5. *Supposons que la condition ci-dessus soit vérifiée, et que ω soit une solution bornée à support compact de l'équation (1.13) associée à un noyau K vérifiant la condition (1.14). Supposons que $\gamma \in (0, 1)$ et que les positions initiales des points \mathcal{X}^N vérifient :*

i) Pour une constante C_∞ indépendante de N ,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} N^\gamma \mu_N^0 \left(B_d(x, N^{-\frac{\gamma}{d}}) \right) \leq C_\infty;$$

ii) Pour un $R_0 > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Supp} \mu_N^0 \subset B_d(0, R_0)$;

iii) pour un certain $r \in (0, r^)$ où $r^* := \frac{\gamma}{1+\alpha}$,*

$$\inf_{i \neq j} |X_i^0 - X_j^0| \geq N^{-\gamma r}.$$

Alors pour tout $T > 0$, il existe deux constantes C_0, C_1 telles que pour $N \geq C_1$ l'estimation ci-dessous a bien lieu :

$$\forall t \in [0, T], \quad W_1(\mu_N(t), \omega(t)) \leq e^{C_0 t} \left(W_1(\mu_0^N, \omega_0) + 2 N^{-\frac{\gamma}{d}} \right). \quad (1.15)$$

Ce théorème n'est pas exactement celui donné dans l'article [Hau09, Théorème 1]. C'est un meilleur théorème, que l'on pourrait obtenir à partir de celui de l'article en raffinant un peu avec les nouvelles techniques introduites dans [HJ11].

Malheureusement, la condition *ii)* est très restrictive, et ne permet de donner aucun résultat de propagation du chaos en dimension 2, même pour un α petit (et positif). Et dans le cas moins intéressant de la dimension 3, on obtient la propagation du chaos pour $\alpha < \frac{1}{2}$ seulement. Les résultats obtenus pour les systèmes du premier ordre du type « tourbillons » sont en ce sens moins bons que ceux obtenus pour les systèmes de particules, du second ordre. On verra dans la section 3 que la situation est inverse dans le cas stochastique, c-à-d entre les équations de Langevin (du second ordre) et la dynamique des tourbillons stochastiques.

L'équation d'agrégation. Un second exemple est celui de l'équation d'agrégation, où le noyau devient

$$K_{ag}(x) = -\nabla W_{ag}(x), \quad \text{avec un potentiel } W_{ag},$$

plus ou moins singulier. Dans ce cas, les points s'attirent ou se repoussent de manière plus ou moins forte. Carrillo, DiFrancesco, Figalli, Laurent et Slepčev ont obtenu dans [CDF⁺11] un résultat de limite de champ moyen pour des potentiel Lipschitz (et donc des forces bornées), mais à ma connaissance rien n'est connu pour des potentiels et forces plus singulières.

Dans l'acte de congrès [CCH13], José Carrillo, Young-Pil Choi et moi-même avons démontré un résultat similaire au théorème 1.5, pour le cas de l'équation d'agrégation. La différence principale est dans le fait qu'on ne regarde plus des solutions bornées de l'équation limite – puisque cette fois-ci la norme infinie n'est plus forcément préservée par l'équation – mais des solutions L^p , pour p suffisamment grand. Ces solutions restent quand même unique pour des temps petit, et cela permet de prouver un résultat de limite de champ moyen, et également la propagation du chaos pour des singularités suffisamment petites.

Chapitre 2

Outils d'analyse fonctionnelle pour la propagation du chaos.

Ce chapitre décrit les résultats obtenus en collaboration avec Stéphane Mischler dans l'article [HM14].

2.1 Une quantification de l'équivalence des « différents » chaos.

On voit dans la définition 1.1, que la notion de suite de probabilités (F^N) chaotique peut-être définie de deux manières différentes : soit en regardant les marginales à un nombre de particule fixé, soit en regardant les mesures empiriques. Jusqu'à récemment, ces points de vues étant considérés comme relativement orthogonaux, et les travaux sur la propagation du chaos n'en utilisaient en général qu'un seul des deux. Mais Mischler et Mouhot ont démontré récemment [MM13] des résultats importants sur le modèle de Kac's (notamment la propagation du chaos entropique, voir plus bas pour une définition de cette notion), en combinant de manière subtile ces deux visions de la propagation du chaos. Leurs travaux reposent notamment sur une version quantitative de l'équivalence entre les deux « visions » du chaos, et avec Stéphane Mischler nous avons généralisé cette quantification.

Pour pouvoir énoncer le résultat, nous introduisons les notations suivantes :

- i) $d(x, y) = \min(1, |x - y|)$, est une version bornée de la distance euclidienne sur $E = \mathbb{R}^d$,
- ii) Sur E^N , on utilise la distance renormalisée $d_N(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d(x_i, y_i)$,
- iii) Pour deux probabilités $F^N, G^N \in \mathcal{P}(E^N)$, $W_1(F^N, G^N)$ désigne la distance de MKW entre ces deux probabilités construite sur la distance d_N ,

iv) Pour deux probabilités $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, $\mathcal{W}_1(\alpha, \beta)$ désigne la distance de MKW entre ces deux probabilités construite sur la distance W_1 définie au point *iii*).

Précisons également que toutes les probabilités considérées ici seront symétriques (i.e. les V.A. associées sont échangeables).

Avec ces notations, la vision du chaos avec les marginales peut-être reformulé ainsi : la suite (F^N) est f -chaotique si pour tout $k \in \mathbb{N}$ (ou seulement pour $k = 2$), $W_1(F_k^N, f^{\otimes k}) \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow +\infty$.

Et la vision du chaos avec les mesures empiriques devient : la suite (F^N) est f -chaotique si $\mathcal{W}_1(F^N, \delta_f) \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow +\infty$. Remarquons ici, qu'on considère F^N comme une probabilité sur $\mathcal{P}(E)$, ce qui est possible car F^N induit naturellement une probabilité sur les mesures empiriques.

Nous démontrons dans [HM14] les inégalités suivantes :

Théorème 2.1. *soit (F^N) une suite de probabilités symétriques sur E^N , et $f \in \mathcal{P}(E)$. Alors :*

i) pour $j \leq k$,

$$W_1(F_j^N, f^{\otimes j}) \leq 2 W_1(F_k^N, f^{\otimes k})$$

ii) pour $k \leq N$,

$$W_1(F_k^N, f^{\otimes k}) \leq \mathcal{W}_1(F^N, \delta_f) + \frac{k^2}{N},$$

iii) pour tout $0 < \gamma < \frac{1}{d+1}$ et $k > \frac{d}{\gamma^{-1}-d-1}$, il existe une constante C telle que

$$\left| W_1(F^N, f^{\otimes N}) - \mathcal{W}_1(F^N, \delta_f) \right| \leq C M_k^{\frac{1}{k}} N^{-\gamma},$$

iv) pour tout $0 < \gamma < \frac{1}{d+1}$ et $k > \frac{d}{\gamma^{-1}-d-1}$, il existe une constante C telle que

$$\mathcal{W}_1(F^N, \delta_f) \leq C M_k^{\frac{1}{k}} \left(W_1(F_2^N, f^{\otimes 2}) + N^{-1} \right)^\gamma$$

$$\text{où } M_k = \int |x|^k F_1^N(dx) + \int |x|^k f(dx).$$

Les deux premiers points sont combinatoires et permettent de comparer des chaos avec un nombre croissant de particules, ce qui n'est pas surprenant. Le troisième permet de comparer deux versions du chaos avec N points : avec le vecteur des positions ou avec les mesures empiriques. Le dernier point est le plus important, il permet de majorer le « chaos à N particules » (ou plutôt le chaos sur les mesures empiriques) par le « chaos à deux particules ».

2.2 Chaos entropique et chaos au sens de Fisher

Nous étudions ensuite le chaos entropique, une notion plus forte de chaos introduite par Kac [Kac56] et formalisée plus récemment dans [CCLR⁺10]. Nous introduisons également une notion plus forte de chaos, le chaos au sens de Fisher. Les définitions précises sont les suivantes :

Définition 2.1. *Soit (F^N) une suite de probabilités symétriques sur $\mathcal{P}(E^N)$ avec un moment d'ordre k uniformément borné pour un certain $k > 0$ (pour pouvoir définir correctement l'entropie), et soit $f \in \mathcal{P}(E)$. On dit que :*

a) (F^N) est f -entropiquement chaotique lorsque

$$F_1^N \rightharpoonup f \text{ faiblement dans } \mathcal{P}(E) \quad \text{et} \quad H(F^N) \rightarrow H(f), \quad H(f) < \infty;$$

b) (F^N) est f -chaotique au sens de Fisher lorsque

$$F_1^N \rightharpoonup f \text{ faiblement dans } \mathcal{P}(E) \quad \text{et} \quad I(F^N) \rightarrow I(f), \quad I(f) < \infty.$$

Nous montrons que ce sont bien des notions de plus en plus fortes de chaos moléculaire.

Théorème 2.2. *Soit $E = \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ (ou soit E l'image par une application bi-Lipschitz et préservant le volume d'un convexe de \mathbb{R}^d). Soit (F^N) une suite de probabilités symétriques sur $\mathcal{P}(E^N)$ avec un moment d'ordre k uniformément borné pour un certain $k > 0$, et soit $f \in \mathcal{P}(E)$.*

Dans la liste ci-dessous, chaque assertion implique la suivante :

i) (F^N) est f -chaotique au sens de Fisher ;

ii) (F^N) est f -chaotique et l'information de Fisher $I(F^N)$ est bornée ;

iii) (F^N) est f -entropiquement chaotique ;

iv) (F^N) est f -chaotique.

Plus précisément, on a la version quantitative de l'implication ii) \Rightarrow iii) suivante :

$$|H(G^N) - H(f)| \leq C_E K W_N(F^N, f^{\otimes N})^\lambda,$$

avec $\lambda := 1/2 - 1/k$, $K := \sup_N I(G^N)^{1/2} \sup_N M_k(G_1^N)^{1/k}$ et C_E une constante dépendant de E .

2.3 Généralisation à la sphère de Kac \mathcal{S}^N .

Dans la communauté cinétique, on désigne souvent par sphère de Kac la sphère (classique) de dimension N et rayon N :

$$\mathcal{K}\mathcal{S}^N := \{\mathcal{V} \in \mathbb{R}^N, \text{ t.q. } V_1^2 + \dots + V_N^2 = N\}.$$

On la munit en général de la mesure uniforme notée σ^N .

Chaoticité des mesures uniformes σ^N sur \mathcal{KS}^N . On sait depuis longtemps, au moins depuis 1866 avec un article de Mehler [Meh66], que la suite σ_N est γ -chaotique, avec γ la Maxwellienne (ou Gaussienne) centrée réduite :

$$\gamma(v) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}.$$

On peut citer par exemple sur ce sujet le résultat de Diaconis et Freedman [DF87] qui montrent que pour tout $k \leq N - 4$,

$$\|\sigma_k^N - \gamma^{\otimes k}\|_1 \leq 2 \frac{k+3}{N-k-3}.$$

Ce résultat correspond à une façon de mesurer le chaos, en regardant les k -marginales, car avec notre distance d_N bornée, on a toujours $W_1(\mu, \nu) \leq \frac{1}{2} \|\mu - \nu\|_1$. Bien sûr, en utilisant les résultats généraux d'équivalence quantitative (détaillés ci-dessus), on peut en déduire des bornes sur le chaos sur les mesures empiriques. Mais cela donnera une borne du type $W_1(\sigma^N, \gamma^{\otimes N}) \leq C_\lambda N^{-\lambda}$, pour tout $\lambda < \frac{1}{2}$, ce qui n'est pas une borne optimale. En effet, nous montrons le résultat plus précis suivant :

Théorème 2.3. *Il existe une constante numérique C telle que*

$$W_1(\sigma^N, \gamma^{\otimes N}) \leq \frac{C}{\sqrt{N}}.$$

Les différents chaos sur les sphères de Kac. Pour continuer, on peut définir des notions de chaos entropique et au sens de Fisher pour des suites de probabilités supportées sur les sphères de Kac :

Définition 2.2. *Soit (F^N) une suite de probabilités symétriques de $\mathcal{P}(\mathcal{S}^N)$ et soit $f \in \mathcal{P}(E)$. On dit que :*

a) (F^N) est f -entropiquement chaotique lorsque

$$F_1^N \rightharpoonup f \text{ faiblement dans } \mathcal{P}(E) \quad \text{et} \quad H(F^N | \sigma^N) \rightarrow H(f|g), \quad H(f|g) < \infty;$$

b) (F^N) est f -chaotique au sens de Fisher si

$$F_1^N \rightharpoonup f \text{ faiblement dans } \mathcal{P}(E) \quad \text{et} \quad I(F^N | \sigma^N) \rightarrow I(f|g), \quad I(f|g) < \infty.$$

Nous avons obtenu dans ce cadre un théorème analogue au Théorème 2.2, avec en particulier des versions quantifiées du chaos entropique. Cela nous a permis de répondre à une question ouverte de l'article [CCLR⁺10, Open Problem 11].

Suites f -chaotique supportées sur \mathcal{KS}^N . Pour toute fonction f avec un moment d'ordre supérieur à 4, Kac a montré dans [Kac56] que la mesure \tilde{F}^N définie comme la restriction à \mathcal{KS}^N de $f^{\otimes N}$ normalisée :

$$\tilde{F}^N := \frac{1}{Z_N} f^{\otimes N}, \quad Z_N := \int_{S^N} f^{\otimes N}(\mathcal{V}^N) \sigma(d\mathcal{V}^N),$$

était un exemple de suite supportée sur les sphères de Kac et f -chaotique. Sa preuve pas tout à fait rigoureuse à été reprise dans [CCLR⁺10, Théorèmes 4 et 9]. Nous avons repris leur démonstration, et montré sous des hypothèses de moment plus élevés que l'on pouvait quantifier le chaos dans ce cas :

Théorème 2.4. *Soit $f \in \mathcal{P}_6(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$, $p > 1$, satisfaisant*

$$\int_{\mathbb{R}} f v dv = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} f v^2 dv = 1.$$

Alors, la suite (\tilde{F}^N) des mesures produit conditionnées est f -entropiquement chaotique, et plus précisément pour deux constantes $C_i = C_i(p, \|f\|_p, M_6(f))$, à partir d'un certain rang :

$$W_1(\tilde{F}_k^N, f^{\otimes k}) \leq \frac{1}{2} \|\tilde{F}_k^N - f^{\otimes k}\|_1 \leq \frac{C_1 k^2}{\sqrt{N}},$$

$$|H(\tilde{F}^N | \sigma^N) - H(f | \gamma)| \leq \frac{C_2}{\sqrt{N}}.$$

Si $I(f) < +\infty$, alors $\sup_{N \in \mathbb{N}} I(\tilde{F}^N | \sigma_N) < +\infty$. Et si de plus

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f'(v)^2}{f(v)} (1 + v^2) dv < +\infty,$$

la suite (\tilde{F}^N) est f -chaotique au sens de Fisher.

Comme dans [CCLR⁺10, Proposition 26], on utilise pour montrer la première partie de ce théorème une version L^∞ du théorème de Berry-Essen, quantifiée dans notre cas :

Proposition 2.1. *Soient $g \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}^D) \cap L^p(\mathbb{R}^D)$, $p \in (1, \infty]$, tels que*

$$\int_{\mathbb{R}^D} x g(x) dx = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^D} x \otimes x g(x) dx = Id, \quad \int_{\mathbb{R}^D} |x|^3 g(x) dx =: M_3.$$

On définit les convolées itérées (et renormalisées) de g :

$$g_N(x) := \sqrt{N} g^{(*N)}(\sqrt{N} x).$$

Il existe un entier $N(p)$ et une constante $C_{BE} = C(p, k, M_3(g), \|g\|_{L^p})$ tels que :

$$\forall N \geq N(p) \quad \|g_N - \gamma^{\otimes D}\|_{L^\infty} \leq \frac{C_{BE}}{\sqrt{N}}.$$

2.4 Hewitt et Savage quantifié, entropie et information de Fisher sur les mélanges.

Hewitt et Savage par un argument de suite de Cauchy. Dans cet article, nous donnons également une nouvelle preuve du théorème classique de de Finetti, Hewitt et Savage [dF37, HS55], qui repose sur les techniques utilisées pour quantifier l'équivalence des différents chaos.

Théorème 2.5. *Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ un borelien. Soit $\mathcal{X}^\infty = (X_1^\infty, \dots, X_k^\infty, \dots) \in E^\infty$ un vecteur aléatoire infini et échangeable. Pour tout N , on note \mathcal{X}^N sa projection sur les N premières composantes : $\mathcal{X}^N = (X_1^\infty, \dots, X_N^\infty)$, et μ^N la mesure empirique aléatoire associée. Alors pour $s > \frac{d}{2}$, la suite (μ^N) de V.A. sur $\mathcal{P}(E)$ est une suite de Cauchy pour la distance $\mathcal{W}_{H^{-s}}$:*

$$\exists C > 0, \quad \forall N, M \in \mathbb{N}, \quad [\mathcal{W}_{H^{-s}}(\mu^N, \mu^M)]^2 \leq C \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right).$$

En particulier, la suite (μ^N) converge vers une certaine V.A. μ avec la vitesse $\mathcal{W}_{H^{-s}}(\mu^N, \mu) \leq CN^{-1/2}$. Cette limite μ est caractérisée par la relation :

$$\mathcal{L}(\mathcal{X}^\infty) = \mathbb{E}[\mu^{\otimes \infty}], \quad c\text{-à-d} \quad \forall j \geq 1, \quad \mathcal{L}(\mathcal{X}^j) = \mathbb{E}[\mu^{\otimes j}] \quad (2.1)$$

Réciproquement, pour toute V.A. μ sur $\mathcal{P}(E)$, l'égalité ci-dessus définit bien la loi d'un vecteur aléatoire infini et échangeable.

On voit donc qu'il y a une bijection entre les lois des vecteurs aléatoires infinis échangeables et les lois des V.A. à valeur dans $\mathcal{P}(E)$. En fait, dans l'article ce résultat est énoncé en terme de probabilité sans référence aux V.A. associées – ce qui est peut-être plus juste car ce résultat concerne vraiment les lois – mais cela nécessite aussi d'introduire un formalisme plus important.

On peut également énoncé le théorème de de Finetti, Hewitt et Savage uniquement en terme de V.A., en utilisant la notation commode suivante :

si \mathbf{Y} est un vecteur aléatoire de E , on désigne par $\mathbf{Y}^{\otimes \infty}$ un vecteur infini aléatoire i.i.d. dont toutes les composantes ont la même loi que \mathbf{Y} .

Le théorème dit alors que tout vecteur infini échangeable \mathcal{X}^∞ peut s'écrire comme un mélange de vecteurs de type $\mathbf{Y}^{\otimes \infty}$. Et la probabilité aléatoire μ utilisée dans (2.1) correspond ici à la loi de \mathbf{Y} .

Entropie et Information de Fisher pour des vecteurs infinis échangeables. Pour des vecteurs aléatoires infinis échangeables, on peut toujours définir l'entropie et l'information de Fisher via les formules :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathcal{X}^\infty) &:= \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{N} H(\mathcal{X}^N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} H(\mathcal{X}^N), \\ \mathcal{I}(\mathcal{X}^\infty) &:= \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{N} I(\mathcal{X}^N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} I(\mathcal{X}^N).\end{aligned}$$

L'égalité entre le supremum et la limite est une conséquence de l'additivité de l'entropie et de l'information de Fisher.

Pour un mélange de vecteur aléatoire \mathbf{Y} sur E (ou de manière équivalente une variable aléatoire μ sur $\mathcal{P}(E)$), avec un moment $\mathbb{E}[\mathbb{E}(|\mathbf{Y}|^k)] < +\infty$ pour un certain $k > 0$, on peut toujours considérer son entropie et son information de Fisher moyennes :

$$\mathbb{E}[H(\mathbf{Y})] = \mathbb{E}[H(\mu)], \quad \mathbb{E}[I(\mathbf{Y})] = \mathbb{E}[I(\mu)].$$

Il était connu que si \mathcal{X}^∞ était le mélange de $\mathbf{Y}^{\otimes \infty}$, donc relié à μ par la relation (2.1), alors on avait égalité $\mathcal{H}(\mathcal{X}^\infty) = \mathbb{E}[H(\mathbf{Y})] = \mathbb{E}[H(\mu)]$. Cela a été démontré par Ruelle et Robinson dans un cadre légèrement différent [RR67]. Nous avons donné un théorème plus général, valable pour des fonctionnelles K vérifiant un certain nombre d'hypothèses, et montré que ce théorème s'appliquait à l'entropie et aussi à l'information de Fisher. Ce dernier point est à notre connaissance nouveau. Précisément, cela repose sur un lemme important, dont on énonce ici qu'une version simplifiée ne tenant pas compte des questions de moment (utiles pour prendre en compte l'entropie) :

Lemme 2.1. *Soit (K_j) une suite de fonctionnelles sur $\mathcal{P}(E^j)$, telle que :*

- (i) $K_j : \mathcal{P}(E^j) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe, propre et positive s.c.i. pour la convergence en loi sur E^j pour tout $j \geq 1$.
- (ii) $K_j(\mathcal{X}^j) \geq K_\ell(\mathcal{X}^\ell) + K_r(\mathcal{X}^r)$ pour tout vecteur aléatoire $X^j = (\mathcal{X}^\ell, \mathcal{X}^r)$ de taille j et $\mathcal{X}^\ell, \mathcal{X}^r$ de taille respective ℓ et r . Il y a égalité ssi \mathcal{X}^ℓ et \mathcal{X}^r sont indépendants.
- (iii) La fonctionnelle $\mathcal{K} : \mathcal{P}(E^\infty) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par (l'égalité du supremum et de la limite fait partie du théorème)

$$\mathcal{K}(\mathcal{X}^\infty) := \sup_{j \geq 1} \frac{1}{j} K_j(\mathcal{X}^j) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{j} K_j(\mathcal{X}^j),$$

est affine au sens suivant. Pour toute partition de $\mathcal{P}(E)$ en sous-ensembles ω_i , $1 \leq i \leq M$, tels que ω_i est ouvert dans $E \setminus (\omega_1 \cup \dots \cup \omega_{i-1})$ pour tout

$1 \leq i \leq M-1$, $\omega_M = \mathcal{P}_m(E) \setminus (\omega_1 \cup \dots \cup \omega_{M-1})$, pour tout \mathcal{X}^∞ échangeable mélange de \mathcal{Y}_i^∞ (échangeable) pour $i \leq M$:

$$\mathcal{L}(\mathcal{X}^\infty) = \alpha_1 \mathcal{L}(\mathcal{Y}_1^\infty) + \dots + \alpha_M \mathcal{L}(\mathcal{Y}_M^\infty) \quad \text{et} \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_M = 1.$$

et tels que la mesure γ_i associée à \mathcal{Y}_i^∞ via (2.1) à son support dans ω_i , alors

$$\mathcal{K}(\mathcal{X}^\infty) = \alpha_1 \mathcal{K}(\mathcal{Y}_1^\infty) + \dots + \alpha_M \mathcal{K}(\mathcal{Y}_M^\infty).$$

Alors sous les hypothèses précédentes, pour tout \mathcal{X}^∞ associée à un mélange \mathbf{Y} de V.A. sur E (ou une mesure aléatoire μ via (2.1)), on a

$$\mathcal{K}(\mathcal{X}^\infty) = \mathbb{E}[K_1(\mathbf{Y})] = \mathbb{E}[K_1(\mu)].$$

La fonctionnelle ainsi définie est donc affine, propre et s.c.i. pour la convergence étroite. De plus, elle satisfait la propriété de Γ -semi-continuité inférieure suivante : pour toute suite (\mathcal{X}^N) de vecteurs aléatoires échangeables de taille N , qui convergent vers un certain \mathcal{X}^∞ mélange de \mathbf{Y} , alors

$$\mathbb{E}[K_1(\mathbf{Y})] \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} K_N(\mathcal{X}^N). \quad (2.2)$$

On a cité ce lemme technique uniquement pour montrer que le caractère général de notre résultat : il peut s'appliquer a priori à une large classe de fonctionnelles, celles qu'on appelle assez communément des « informations » (entropie ou information de Fisher, relatives ou non...). Celles-ci vérifient en effet quasiment « par définition » les deux premiers points. La dernière hypothèse est la plus technique : on suppose que la fonctionnelle limite (pour les vecteurs aléatoires infinis) est déjà affine, à condition d'ajouter des V.A. à supports disjoints. Si ces trois hypothèses sont vérifiées, on en déduit alors que la fonctionnelle limite est vraiment affine.

En un certain sens, ce lemme prouve peu de chose : on passe de « la fonctionnelle limite est affine sous certaines conditions » à « elle est affine en général ». Mais ceci est néanmoins intéressant car il est beaucoup plus simple de prouver qu'une fonctionnelle de type information est affine sous les conditions de supports. Essayons d'expliquer cela.

En reprenant les notations du théorème, tronquons le vecteur infini aléatoire \mathcal{X}^∞ à l'ordre N . On peut toujours le voir comme un mélange des \mathcal{Y}_i^N , les versions tronquées des \mathcal{Y}_i^∞ . En général, les fonctionnelles K_N qui nous intéressent sont des intégrales d'une certaine quantité liée à la loi de \mathcal{X}^N , par exemple pour l'information de Fisher :

$$I_N(\mathcal{X}^N) = \int_{E^N} \left| \nabla \ln \frac{dF^N}{dX^N} \right|^2 F^N(dX^N), \quad F^N := \mathcal{L}(\mathcal{X}^N).$$

En notant G_i^N les lois des \mathcal{Y}_i^N , on a $F^N = \alpha_1 G_1^N + \dots + \alpha_M G_M^N$. Mais les hypothèses de supports disjoints dans *iii*) et la loi empirique des grands nombres (aussi connu comme le théorème de Glivenko-Cantelli) font que les G_i^N sont presque à support disjoints : pour un i fixé, les mesures empiriques associées à \mathcal{Y}_i^N se concentrent en effet autour des γ_i , et ceux-ci ont des supports bien distincts par hypothèse.

Supposons un instant que les supports $\text{Supp } G_i^N$ soient vraiment disjoints, on aurait alors sur $\text{Supp } G_i^N$: $\nabla \frac{dF^N}{dX^N} = \nabla \frac{dG_i^N}{dX^N}$, et en découpant l'intégrale sur les différentes régions, on obtiendrait exactement :

$$I(\mathcal{X}^N) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \int_{\text{Supp } G_i^N} \left| \nabla \ln \frac{dG_i^N}{dX^N} \right|^2 G_i^N(dX^N) = \sum_{i=1}^M \alpha_i I(\mathcal{Y}_i^N),$$

et il suffirait de passer ensuite à la limite $N \rightarrow +\infty$, pour prouver l'hypothèse du *iii*). La question est donc de savoir si l'approximation faite (des supports vraiment disjoints) est acceptable, ou encore que l'on peut encadrer les termes d'erreurs qui viendront du fait que les supports ne sont en réalité qu'asymptotiquement disjoints. Il est difficile de répondre en général à cette question, et cela demande d'être vérifié pour chaque cas particulier. Mais c'est ce que nous avons pu vérifier pour l'information de Fisher dans l'article, et aussi pour une version partielle de l'information de Fisher [FNHM14], et cela implique le théorème suivant :

Théorème 2.6. *Soit \mathcal{X}^∞ un vecteur infini aléatoire échangeable (avec un moment d'ordre k fini, $k > 0$ pour l'entropie). On lui associe grâce au théorème de Hewitt et Savage un mélange \mathbf{Y} de vecteurs i.i.d.. Alors*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathcal{X}^\infty) &= \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{N} H(\mathcal{X}^N) = \mathbb{E}[H(\mathbf{Y})], \\ \mathcal{I}(\mathcal{X}^\infty) &= \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{N} I(\mathcal{X}^N) = \mathbb{E}[I(\mathbf{Y})]. \end{aligned}$$

Soit (\mathcal{X}^N) une suite de vecteurs aléatoires échangeables convergeant vers ce \mathcal{X}^∞ . Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[H(\mathbf{Y})] = \mathcal{H}(\mathcal{X}^\infty) &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} H(\mathcal{X}^N), \\ \mathbb{E}[I(\mathbf{Y})] = \mathcal{I}(\mathcal{X}^\infty) &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} I(\mathcal{X}^N). \end{aligned}$$

Ce théorème (et même des versions légèrement modifiées pour des entropies et informations de Fisher partielles) peut-être très utile pour les problèmes de propagation du chaos. On verra un exemple d'utilisation dans ce cadre au chapitre 3.

Chapitre 3

Propagation du chaos pour des modèles stochastiques.

3.1 Le modèle des tourbillons aléatoires.

Un résultat important d'Osada. Dans les années 80, en conclusion d'un travail de longue haleine sur les processus de diffusion avec dérive à divergence nulle [Osa85a, Osa87a, Osa85b], Osada a démontré [Osa87c] la propagation du chaos pour le système des tourbillons aléatoires avec viscosité ν suffisamment grande ($\nu > (2\pi)^{-1}$) :

$$\forall i \leq N, \quad dX_i^N = \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} a_i^N a_j^N K_{BS}(X_i^N - X_j^N) dt + \nu dB_i(t), \quad (3.1)$$

ou les B_i sont des Browniens indépendants de dimension 2, et les $a_i^N \in \mathbb{R}$ les forces des tourbillons, et $K_{BS}(x) = \frac{1}{2\pi} \nabla^\perp \ln |x|$ est le noyau de Biot-Savard déjà défini dans l'équation (1.12) de la section 1.4 . Si tous les a_i^N sont égaux à 1 (pour simplifier), le modèle limite associé est l'équation différentielle stochastique non-linéaire (EDSNL) de type McKean-Vlasov suivante :

$$dX_t = \mathbb{E}_Y [K_{BS}(X_t - Y_t)] + dB_t, \quad (3.2)$$

ou B_t est un Brownien de dimension 2, et Y une copie indépendante du processus X . L'équation de Fokker-Planck (ou de Kolmogorov en avant) associée sur la loi ω_t de X_t est l'équation du tourbillon (ou encore équation de Navier-Stokes 2D en formulation tourbillon)

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = \frac{\nu^2}{2} \Delta \omega, \quad u(t) := K_{BS} * \omega(t). \quad (3.3)$$

Le résultat d'Osada est valable pour une viscosité suffisamment grand, et pour des données initiales bornées : $\omega_0 \in L^\infty$. Il démontre la propagation du chaos au sens trajectorien de (3.1) vers (3.2), qui implique la propagation du chaos pour les mesures empiriques, vers l'unique solution régulière de l'équation du Tourbillon (3.3) avec donnée initiale ω_0 .

Dans la courte note [Osa87b], Osada donne aussi quelques idées pour montrer la propagation du chaos pour une viscosité arbitrairement petite : il montre sans donner tous les détails que les mesures empiriques associées aux solutions du système (3.1) se concentrent sur des solutions faibles de (3.3) (donc un résultat qui ne porte pas sur les trajectoires), mais il n'a pas un bon critère pour assurer que c'est vers l'unique solution suffisamment régulière.

Notre amélioration. Nicolas Fournier, Stéphane Mischler et moi-même, avons amélioré dans [FNHM14] le résultat d'Osada de propagation du chaos moléculaire sur plusieurs points :

- Notre résultat est valable sous des hypothèses plus faibles d'intégrabilité et de moment : $\omega_0 \in L_k^1 \cap L \log L$ pour un certain $k \in (0, 1]$, i.e.

$$\exists k \in (0, 1], \quad \int_{\mathbb{R}^2} \left(|x|^k + |\ln |\omega_0|| \right) |\omega_0(x)| dx < +\infty,$$

- il est valable pour toute viscosité ν strictement positive,
- il montre également la propagation entropique du chaos,
- enfin, la preuve est d'une certaine manière plus simple. Notamment, elle ne fait pas appel aux estimations très fines et complexes de type Aronson – mais pour des diffusions avec dérivées singulières – avec des constantes indépendantes de la dimension, dont Osada avait besoin.

Notre résultat précis est le suivant. Pour simplifier, on l'énoncera dans le cas où tous les a_i sont égaux à un, mais une version plus générale où les a_i sont aléatoires et bornés est écrite dans l'article [FNHM14].

Théorème 3.1. *Notons $\mathcal{X}^N = (X_1^N, \dots, X_N^N)$ les solutions échangeables de (3.1) avec une suite (\mathcal{X}_0^N) de données initiales \mathcal{Y}_0 -chaotique. On suppose que*

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_1^N|^k] < +\infty, \quad \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{N} H(\mathcal{X}^N) < +\infty.$$

On désigne par \mathcal{Y} l'unique solution de l'EDS non-linéaire (3.2) avec données initiales \mathcal{Y}_0 et qui vérifie pour tout $t \geq 0$

$$\int_0^t I(\mathcal{Y}_s) ds < +\infty$$

(L'unicité d'une telle solution fait partie du théorème). Alors la suite des trajectoires \mathcal{X}^N est \mathcal{Y} -chaotique.

Si de plus, la suite \mathcal{X}_0^N est \mathcal{Y}_0 -entropiquement chaotique (au sens de la définition 2.1), alors pour tout $t \geq 0$, la suite \mathcal{X}_t^N est \mathcal{Y}_t -entropiquement chaotique.

Schéma de la preuve. Sans rentrer dans les détails, on peut dire que la preuve repose sur une utilisation intensive de la borne sur l'information de Fisher donnée par la dissipation de l'entropie :

$$H(\mathcal{X}_t^N) + \int_0^t I(\mathcal{X}_s^N) ds = H(\mathcal{X}_0^N).$$

Cette égalité couplée à une inégalité sur l'accroissement du moment d'ordre k , permet d'obtenir une borne uniforme du type

$$\sup_{N \in \mathbb{N}, s \leq t} \mathbb{E}[|X_{1s}^N|^k] + \sup_{N \in \mathbb{N}} \int_0^t I(\mathcal{X}_s^N) ds < +\infty.$$

Ensuite la sous-additivité de l'information de Fisher, couplée à une certaine équation de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev permet de montrer que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \frac{ds}{|X_{1,s}^N - X_{2,s}^N|^\alpha} \right] \leq C_{t,\alpha},$$

pour une constante $C_{t,\alpha}$ indépendante de N , pour tout $\alpha < 2$ et tout temps $t \geq 0$. Cette estimation et la précédente permettent de montrer la tension de la suite \mathcal{X}^N . Ensuite, ces bornes uniformes permettent également de montrer, avec la méthode classique des martingales introduite par Sznitman [Szn91], que les trajectoires de \mathcal{X}^N se concentrent sur des solutions de (3.2).

Il reste alors à montrer qu'elles ne se concentrent pas sur n'importe quelles solutions de l'équation de McKean-Vlasov (3.2), mais vers des solutions suffisamment régulières pour qu'on puisse conclure à leur unicité. Ici, aussi c'est l'information de Fisher qui joue un rôle clé : comme on l'a vu au Théorème 2.6 de la section précédente, ses propriétés permettent de « passer à la limite » en grand nombre de particules. Si on suppose que les trajectoires \mathcal{X}^N converge vers un certain vecteur aléatoire infini noté \mathcal{Y}^∞ , associé cette fois-ci à un mélange \mathbf{Y} de solutions de l'équation (3.2) d'après le point précédent, alors

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t I(\mathbf{Y}_s) ds \right] = \int_0^t I(\mathcal{Y}_s^\infty) ds \leq \liminf_{N \rightarrow +\infty} \int_0^t I(\mathcal{X}_s^N) ds \leq C.$$

Ce qui implique que la V.A. \mathbf{Y} a un support inclus dans l'ensemble des solutions de l'EDSNL (3.2) qui ont une information de Fisher L^1 en temps.

Or l'unicité des solutions sous cette condition est une conséquence d'un résultat déjà connu sur l'unicité des solutions continues en temps (et à valeur L^1) de (3.3), obtenu par Ben-Artzi [BA94]. Précisément, une utilisation du contrôle a priori de l'information de Fisher permet de montrer que les marginales temporelles ω_s du processus sont des solutions renormalisées au sens de DiPerna et Lions de (3.3), et ensuite de montrer suffisamment d'estimations a priori (par une technique de boot-strap) pour obtenir la continuité temporelle de ces solutions. On en déduit l'unicité des marginales temporelles associées au processus. L'unicité du processus en découle, par exemple en adaptant un argument utilisé par Crippa et De Lellis pour montrer l'unicité des solutions d'EDO à coefficients peu réguliers [CDL08].

3.2 Vers des modèles particuliers de type Langevin.

Dans un travail en cours avec Samir Salem, stagiaire de Master 2 sous ma direction et futur étudiant en thèse, nous essayons d'étendre la méthode pour prouver la propagation du chaos pour Vlasov-Poisson 1D utilisée dans [Hau13] et décrite dans la section 1.1, au cas où l'on ajoute des forces aléatoires indépendantes (browniens). En d'autre terme, on cherche à montrer la convergence du système de Langevin

$$dX_i^N = V_i^N dt, \quad dV_i^N = -\frac{1}{N} \sum_{j \neq i} F(X_i^N - X_j^N) dt - \lambda V_i^N dt + \nu dB_t^i, \quad (3.4)$$

où $i \leq N$ et la force F est définie dans (1.4), vers une EDSNL du type

$$dX_t = V_t dt, \quad dV_t = \mathbb{E}_Y [F(X_t - Y_t)] dt + dB_t, \quad (3.5)$$

où Y est une copie indépendante du processus X . L'équation de type Vlasov-Poisson-Fokker-Planck associée est :

$$\begin{aligned} \partial_t f + v \partial_x f - \partial_x E(t, x) \partial_v f &= \partial_v \left(\frac{\nu^2}{2} \partial_v f - \lambda v f \right), \\ E(t, x) = [F * \rho(t)](x) &= \int F(x - y) f(t, y, w) dy dw, \end{aligned} \quad (3.6)$$

La difficulté supplémentaire, par rapport au cas sans bruit, est que cette fois-ci les mesures empiriques ne sont plus solutions de l'équation limite. Car dans l'équation d'une mesure empirique associée au système de Langevin (3.4), apparaît un échantillon de N trajectoires Browniennes, alors que c'est le

vrai mouvement Brownien qui est utilisé dans l'équation limite (3.5). Pour cette raison, le couplage direct les mesures empiriques au système limite semble beaucoup plus difficile à utiliser que dans le cas déterministe. Il semble plus simple d'utiliser l'argument plus classique qui consiste à coupler les solutions du système de Langevin à N copies du processus non-linéaire limite attendu (3.5), avec les mêmes bruits. Cela a l'avantage de faire disparaître les contributions stochastiques lorsqu'on calcule l'évolution du couplage, mais il devient du coup plus difficile d'adapter la méthode utilisée dans le cas sans bruit, qui utilisait des bornes L^∞ qui ne sont plus disponibles puisqu'on couple maintenant des mesures empiriques à d'autres mesures empiriques. Notre idée est de remplacer cette norme L^∞ par une version discrète de celle-ci, qu'il resterait alors à estimer...

Chapitre 4

Limites quasi-neutre ou gyro-cinétique pour les plasmas

4.1 Limite quasi-neutre en dimension 1

Cette section décrit les résultats obtenus dans l'article à paraître [HKH13], écrit en collaboration avec Daniel Han-Kwan.

L'équation de Vlasov-Poisson adimensionnée. Nous nous sommes intéressés à l'équation de Vlasov-Poisson 1D, que l'on peut écrire comme-ci dessous après un adimensionnement

$$\begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + v \partial_x f_\varepsilon - \partial_x V_\varepsilon \partial_v f_\varepsilon = 0, \\ -\varepsilon^2 \partial_x^2 V_\varepsilon = \int f_\varepsilon dv - 1, \end{cases} \quad (4.1)$$

où f_ε est la densité d'électrons, définie en temps $t \geq 0$, pour des positions x sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et des vitesses v dans \mathbb{R} . On suppose que ces électrons vivent dans un environnement d'ions dont la densité est constante (une hypothèse raisonnable si l'échelle de temps est suffisamment petite). Cette dernière hypothèse est juste une simplification qui permet de travailler avec un modèle à une espèce, mais les résultats obtenus pourrait-être généralisés à plusieurs espèces. L'adimensionnement consiste à se placer aux bonnes échelles de temps et longueur pour obtenir une équation avec les minimum de constantes physiques différentes de 1. On arrive à l'équation précédente (4.1), qui ne fait apparaître que le paramètre ε , qui est précisément le ratio entre la longueur de Debye et la taille caractéristique du système. La longueur de Debye est la longueur typique des phénomènes électriques dans le plasma : c'est par exemple la longueur d'onde des ondes de Langmuir (aussi appelées oscillations plasmas).

L'énergie associée au système est la suivante

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\varepsilon[f_\varepsilon] &:= \frac{1}{2} \int f_\varepsilon |v|^2 dv dx + \frac{\varepsilon^2}{2} \int |\partial_x V_\varepsilon[f_\varepsilon]|^2 dx, \\ &= \frac{1}{2} \int f_\varepsilon |v|^2 dv dx + \frac{1}{2} \int V_\varepsilon[f_\varepsilon] \rho_\varepsilon dx.\end{aligned}\tag{4.2}$$

La limite formelle : l'équation de Vlasov quasi neutre. Dans la plupart des situations physiquement intéressantes, le ratio ε est très petit. Dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, une analyse formelle suggère l'équation limite suivante :

$$\begin{cases} \partial_t f + v \partial_x f - \partial_x V \partial_v f = 0, \\ \int f dv = 1, \end{cases}\tag{4.3}$$

A noter, que le système ne contient plus d'équation (apparente) pour V , qui semble donc juste être un multiplicateur de Lagrange nécessaire pour assurer la contrainte de neutralité $\rho = 1$ partout (pour tout $x \in \mathbb{T}$). Mais en fait, une équation sur V est cachée dans le système : en utilisant les équations des moments de f , on obtient une équation de type « loi de pression »

$$V = - \int v^2 f dv.\tag{4.4}$$

Pour cette raison, cette limite quasi-neutre est très similaire à une limite incompressible en mécanique des fluides : en fait cette analogie a été mise en évidence par Yann Brenier [Bre89] qui a expliqué que (4.3) était une sorte de version cinétique de l'équation d'Euler incompressible.

Malheureusement, cette equation quasi-neutre (4.3) semble très mal posée. À notre connaissance, il n'existe qu'un résultat d'existence locale en temps pour des données analytiques [BFJJ13, Theorem 1.1]; le cas considéré ici correspondant à $\beta = \sigma = \alpha = 0$ dans cette référence. Des résultats similaires [HK11, JN11, BN12] ont aussi été prouvés pour un système très proche parfois appelé Vlasov-Benney, où l'équation de quasi-neutralité $\rho = 1$ est remplacée par $V = \rho - 1$ (toujours une équation de neutralité, mais utilisée plutôt lorsqu'on considère des ions dans un environnement d'électrons adiabatiques).

La question difficile de la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans ces conditions, avec un modèle limite pour lequel on sait très peu de choses, il semble bien difficile d'obtenir des résultats sur le comportement des solutions de (4.1) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Grenier a bien proposé dans [Gre99a] des arguments « heuristiques »

dans le cas particulier de la dimension 1, et notre première idée a été de donner une version rigoureuse de ceux-ci, sans succès.

Dans un second temps, nous nous sommes restreint aux solutions stationnaires homogènes (en position) de l'équation de Vlasov-quasi neutre (4.3). C'est-à-dire qu'on ne considère plus que des solutions $f(t, x, v) = \mu(v)$, pour un certain profil μ . L'intérêt de cette simplification est que ces profils μ sont des solutions (stationnaires) de l'équation de Vlasov-Poisson (4.1) et de l'équation limite (4.3), et que de plus, la stabilité ou l'instabilité linéaire de ces équilibre est bien comprise. Le fameux *critère de Penrose* dit (dans le cas où l'on remplace \mathbb{T} par \mathbb{R}) qu'un profil μ est linéairement instable si et seulement s'il vérifie le critère d'instabilité de Penrose suivant [Pen60]

Définition 4.1 (Critère d'instabilité de Penrose). *Un profil homogène $\mu(v)$, satisfait le critère d'instabilité de Penrose lorsqu'il existe un minimum local \bar{v} de μ tel que l'inégalité suivante à lieu :*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v) - \mu(\bar{v})}{(v - \bar{v})^2} dv > 0. \quad (4.5)$$

Si le minimum local est plat, c-à-d atteint sur un intervalle $[\bar{v}_1, \bar{v}_2]$, alors (4.5) doit-être satisfait pour tout $\bar{v} \in [\bar{v}_1, \bar{v}_2]$.

On parle souvent d'instabilité double faisceau, car un cas typique de profil instable est celui d'un profil double bosse, correspondant à deux faisceaux de particules circulant dans des directions opposées.

Dans le cas du tore \mathbb{T} , il n'y a pas de critère de Penrose simple nécessaire et suffisant pour l'équation de Vlasov-Poisson (mais on peut donner des conditions nécessaires). Par contre, dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on va voir que le bon critère pour l'équation de Vlasov quasi-neutre est bien celui énoncé ci-dessus. Sur la question de l'instabilité non-linéaire, on peut citer les travaux de Guo et Strauss [GS95], et pour la stabilité non-linéaire, ceux de Marchioro et Pulvirenti [MP86] et Batt et Rein [BR93] qui traitent le cas des profils radiaux et décroissants en dimension 1,2 puis 3. Par contre, le seul résultat qui à notre connaissance implique la stabilité sans hypothèse de symétrie (mais pour des données analytiques ou Gevrey), est le résultat de Mouhot et Villani [MV11] (voire aussi [BMM13]) sur l'amortissement Landau.

Les résultats existants. Les premiers travaux mathématiques sur la limite quasi-neutre sont ceux de Brenier et Grenier [BG94, Gre95], qui utilisent les mesures de défauts : ils montrent la convergence des deux premiers moments de f_ε solution de (4.1) vers le système attendu plus des mesures de défauts pour tenir compte des possibles problèmes de compacité et des

oscillations plasmas. Ensuite Grenier adopte dans [Gre96] un point de vue mutli-fluide pour le plasma, qu'il utilise pour montrer la convergence vers un système mutli-fluide incompressible, sous des hypothèses de régularité forte qui préviennent l'apparition des instabilités double faisceau. Ce résultat a ensuite été amélioré par deux travaux de Brenier [Bre00] puis Masmoudi [Mas01], qui ne traitent que le cas mono-cinétique (des profils limites de type $f(t, x, v) = \rho(t, x) \delta_{v(t, x)}$) avec des méthodes d'entropie relative, aussi appelée fonctionnelle de Casimir. Brenier traite le cas des données peu régulières masi bien préparées, pour lesquelles il n'y a pas d'onde de Langmuir, alors que Masmoudi traite le cas général avec plus de régularité, et n'obtient la convergence qu'après filtration des oscillations.

Notre objectif était de généraliser ces résultats à des cas vraiment cinétiques et pas seulement mono-cinétiques, sans utiliser une formulation mutli-fluide comme Grenier [Gre96]. Mais comme le modèle cinétique limite (4.3) est beaucoup moins bien compris que le système fluide limite (Euler incompressible en dimension $d \geq 2$), nous avons dû nous restreindre à étudier la limite quasi-neutre au voisinage de solutions stationnaires homogènes.

Un résultat d'instabilité instantannée au voisinage des équilibres instables. Comme expliqué par Grenier dans la note [Gre99a], au voisinage d'un équilibre instable, la limite quasi-neutre est mal posée, car les instabilités mettent un temps de plus en plus court, de l'ordre de ε à se développer. À la limite, elles se développent donc de manière instantannée, et cela permet de fabriquer des solutions f_ε de (4.1), avec des conditions initiales très proches d'un profil stationnaire instable, mais qui ne convergent pas vers ce profil pour tout temps strictement positif. En reprennant les idées maintenant standard introduites par Grenier [Gre99b] dans le cadre des limites incompressibles en mécanique des fluides, nous avons montré rigoureusement une version légèrement différente du résultat annoncé (mais non explicitement prouvé) dans [Gre99a].

Définition 4.2. *Un profil $\mu(v)$ strictement positif de classe C^1 satisfait la condition δ lorsque*

$$\sup_{v \in \mathbb{R}} \frac{|\mu'(v)|}{(1 + |v|)\mu(v)} < +\infty. \quad (4.6)$$

Cette condition est utile pour assurer la positivité des perturbations du profil μ instable que nous construisons. En fait, le théorème ci-dessous, est valable sous une condition plus générale mais plus délicate à énoncer, qui permet notamment de considérer des profils à support compact. Pour la clarté de l'exposé, je me contenterai ici de cette version simplifiée et je renvoie à [HKH13] pour plus de détails.

La notation $W_{x,v}^{s,1}$ désigne l'espace de Sobolev classique construit sur $L_{x,v}^1(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ et d'ordre s . Un profil est dit régulier s'il appartient à $W_v^{s,1}$ pour tout $s \in \mathbb{N}$. J'utilise la convention suivante dans l'énoncé : la notation (f_ε) (avec un paramètre continu $\varepsilon > 0$) désigne en fait une suite $(\varepsilon_k)_k$ convergeant vers 0 ainsi qu'une suite $(f_{\varepsilon_k})_k$.

Théorème 4.1. *Soit $\mu(v)$ un profil régulier strictement positif satisfaisant le critère d'instabilité de Penrose 4.1, et la condition δ de la définition 4.2. Pour tout $N > 0$ et $s > 0$, il existe une suite de données initiales $(f_{0,\varepsilon})$ telle que*

$$\|f_{\varepsilon,0} - \mu\|_{W_{x,v}^{s,1}} \leq \varepsilon^N,$$

et pour lesquels la suite (f_ε) des solutions de (4.1) associées satisfait :

- i) **Instabilité des observables macroscopiques dans L^1 :** La densité $\rho_\varepsilon := \int f_\varepsilon dv$, et le champ électrique $E_\varepsilon = -\partial_x V_\varepsilon$ vérifient pour tout $\alpha \in [0, 1)$,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, \varepsilon^\alpha]} \|\rho_\varepsilon(t) - 1\|_{L_x^1} > 0, \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, \varepsilon^\alpha]} \varepsilon \|E_\varepsilon\|_{L_x^1} > 0. \quad (4.7)$$

- ii) **Instabilité complète de la fonction de distribution :** Pour tout $r \in \mathbb{Z}$,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, \varepsilon^\alpha]} \|f_\varepsilon(t) - \mu\|_{W_{x,v}^{r,1}} > 0. \quad (4.8)$$

Ce théorème contredit donc la limite formelle quasi-neutre au voisinage d'un équilibre instable. Ou au moins, il donne un exemple de cas où l'on ne converge pas vers la solution d'équilibre « attendue », même en temps très petit.

Un résultat de stabilité. Mais auprès des équilibres stables et symétriques, la situation est différente. Nous avons montré un résultat de stabilité, après filtration des oscillations plasma. La définition suivante précise quels type d'équilibre nous allons considérer maintenant :

Définition 4.3 (*S*-stabilité). *Un profil μ satisfaisant $\int_{\mathbb{R}} \mu(v) dv = 1$ est dit *S*-stable lorsque :*

- i) Continuité : μ est continu sur \mathbb{R} .
- ii) Énergie finie : $\int \mu(v)v^2 dv < +\infty$.
- iii) Monotonie : Il existe $\bar{v} \in \mathbb{R}$, tel que $v \mapsto \mu(v)$ est strictement croissante pour $v < \bar{v}$ et strictement décroissante pour $v > \bar{v}$, et donc μ atteint son unique maximum au point \bar{v} .
- iv) Symétrie : Pour tout $v \in \mathbb{R}$, $\mu(2\bar{v} - v) = \mu(v)$.

Dans ce cas, il existe une unique fonction continue strictement croissante $\varphi : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$\mu(v) = \varphi\left(-\frac{|v - \bar{v}|^2}{2}\right), \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^0 \varphi(u) \sqrt{-u} \, du < +\infty. \quad (4.9)$$

Dans le Théorème 4.2 ci-dessous, on justifie la limite quasi-neutre au voisinage d'un équilibre S -stable. Cette stabilité sera contrôlée grâce à une « fonctionnelle de Casimir » (ou encore « entropie relative »), définie de la manière suivante :

Définition 4.4. *Pour tout profil u S -stable, auquel on associe la fonction φ définie dans (4.9), on introduit une fonction $Q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant $Q(0) = 0$ et $Q' = \varphi^{-1}$ sur l'image de φ . En dehors de cet intervalle, Q' est supposée continue et croissante, de sorte que Q est globalement convexe et de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ . La fonctionnelle de Casimir associée est définie par*

$$H_Q(f) := \int (Q(f) - Q(\mu) - Q'(\mu)(f - \mu)) \, dv dx, \quad (4.10)$$

et prend ses valeurs dans $[0, +\infty]$.

Cette fonctionnelle de Casimir est une sorte d'entropie relative pour l'équation de Vlasov-Poisson ; elle est construite de manière à être minimisée par μ . Initialement, des quantités similaires ont été introduites par Arnold [Arn65, Arn66] pour des modèles fluides. Plus tard, leur usage a été étendu aux plasmas dans [HMRW85, Rei94, CCD02]. Elle permet de contrôler des normes L^p :

$$\|f_\varepsilon - \mu\|_p^2 \leq \frac{1}{C} H_Q(f_\varepsilon), \quad \text{pour certains } p, \quad \text{par exemple } p = 1, 2.$$

Par exemple, si μ est une Maxwellienne, on retrouve exactement l'entropie relative usuelle.

Notre résultat dans le cas mal préparé est le suivant.

Théorème 4.2. *Soit μ un profil S -stable de la forme donnée dans (4.9) et vérifiant*

$$\int \mu(v)(1 + v^{2+\eta}) \, dv < +\infty, \quad \text{pour un certain } \eta > 0. \quad (4.11)$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $(f_\varepsilon, V_\varepsilon)$ une solution forte globale de (4.1), avec donnée initiale $f_{0,\varepsilon}$. Pour tout potentiel V_0 tel que $\partial_{xxx} V_0 \in L^\infty$, on définit une

« énergie libre modulée » :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon^O(t) := H_Q \left[f_\varepsilon \left(t, x, v - \partial_x V_0(x - \bar{v}t) \sin \frac{t}{\varepsilon} \right) \right] \\ + \frac{1}{2} \int \left[\varepsilon \partial_x V_\varepsilon - \partial_x V_0(x - \bar{v}t) \cos \frac{t}{\varepsilon} \right]^2 dx. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Alors on a le contrôle suivant sur l'accroissement de $\mathcal{L}_\varepsilon^O$: il existe une constante $K > 0$, dépendant de $\|\partial_{xx} V_0\|_\infty$ et $\|\partial_{xxx} V_0\|_\infty$, telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{L}_\varepsilon^O(t) \leq e^{2\|\partial_{xx} V_0\|_\infty t} \left[\mathcal{L}_\varepsilon^O(0) + K\varepsilon(1 + \mathcal{E}_{\varepsilon,0} + \mathcal{Q}_{\varepsilon,0}) \right], \quad (4.13)$$

où

$$\mathcal{E}_{\varepsilon,0} := \mathcal{E}_\varepsilon(f_{0,\varepsilon}), \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_{\varepsilon,0} := \int \left(|Q|(f_{\varepsilon,0}) + \frac{Q^2(f_{\varepsilon,0})}{f_{\varepsilon,0}} \right) dv dx. \quad (4.14)$$

Ce théorème montre que l'on peut contrôler l'accroissement de « l'énergie libre modulée » $\mathcal{L}_\varepsilon^O$, à condition de filtrer les oscillations plasmas. Et ce contrôle contient un contrôle sur la distance à l'équilibre μ , au sens de la fonctionnelle de Casimir H_Q .

On peut observer que les oscillations plasmas filtrées ici, apparaissent dans la fonction de répartition f_ε et pas dans la densité physique ρ qui reste essentiellement proche de 1 (ceci pourrait-être quantifié, dans les cas où la fonctionnelle de Casimir est l'entropie relative usuelle, par exemple).

Solutions symétriques de l'équation de Vlasov quasi-neutre. Le théorème 4.2 précédent repose sur une conditions de monotonicité, plus précisément une condition de type « une bosse », naturelle au vu du critère de Penrose (Definition 4.1) et une condition de symétrie moins fondée physiquement. Pour autant, la symétrie est crucial dans le théorème précédent, car elle est indispensable pour construire une bonne fonctionnelle de Casimir.

Il pourrait sembler naturel d'essayer de montrer la limite quasi-neutre non plus seulement vers des solutions stationnaires, mais vers des solutions f de (4.1) qui satisfont la condition de monotonie et de symétrie partout. Mais le résultat de rigidité ci-dessous montre que c'est inutile : de telles solutions sont forcément homogènes en temps et en position.

Proposition 4.1. *Soit f une solution faible de (4.3) satisfaisant les hypothèses suivantes. Le champ électrique $E = -\partial_x V$ appartient à $L_t^\infty L_x^1$ et il existe une fonction $\bar{v}(t, x)$ de classe C^1 telle que :*

i) pour tout t, x , $v \mapsto f(t, x, v)$ est croissante pour $v < \bar{v}(t, x)$ et décroissante pour $v > \bar{v}(t, x)$, et donc atteint son maximum au point $v = \bar{v}(t, x)$,

ii) pour tout t, x, v , $f(t, x, 2\bar{v}(t, x) - v) = f(t, x, v)$.

Alors il existe une constante \bar{v} et un profil $\varphi : \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$, décroissant et vérifiant $\int_{\mathbb{R}^+} \varphi(u) \frac{du}{\sqrt{u}} = 1$, tel que pour tout $t \geq 0, x \in \mathbb{T}, v \in \mathbb{R}$,

$$f(t, x, v) = \varphi \left(-\frac{|v - \bar{v}|^2}{2} \right). \quad (4.15)$$

Ce résultat « négatif » implique que pour pouvoir montrer des résultats de convergence dans la limite quasi-neutre plus généraux, il faudrait donc inventer une technique qui ne demande pas d'hypothèse de symétrie. Car les seules solutions localement « symétriques » de l'équation de Vlasov (4.3) quasi-neutre sont les équilibres homogènes.

Ondes BGK pour l'équation Vlasov quasi-neutre. Pour illustrer le caractère dégénéré du modèle limite (4.3), nous avons étudié la construction des ondes BGK [BGK57] dans le cas quasi-neutre. Et la aussi, le problème est en quelque sorte « pathologique ».

Précisément, nous étudions le système stationnaire associé à (4.3) :

$$\begin{cases} v \partial_x f - \partial_x V \partial_v f = 0, \\ \rho = \int f(x, v) dv = 1, \end{cases} \quad (4.16)$$

sur l'espace $\Omega = [0, 1] \times \mathbb{R}$. Les conditions limites entrantes sont données par :

$$\begin{cases} f(0, v) = f_0^+(v) & \text{si } v \geq 0, \\ f(1, v) = f_0^-(v) & \text{si } v \leq 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Nous montrons le résultat suivant.

Théorème 4.3. *Supposons que $f_0^\pm : \mathbb{R}^\pm \rightarrow \mathbb{R}^+$ sont deux fonctions mesurables positives telles que $\int_0^\infty (f_0^+(v) + f_0^-(-v)) dv = 1$. On définit la fonction f_T sur $(0, +\infty)$ comme ci-dessous*

$$f_T(u) := \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (f_0^+(v) + f_0^-(-v)) \frac{u v dv}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.18)$$

Alors pour tout potentiel continu $V : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^-$ vérifiant $V(0) = V(1) = 0$, la fonction

$$(x, v) \mapsto f(x, v) = \begin{cases} f_0^+(\sqrt{v^2 + 2V(x)}) & \text{si } v \geq \sqrt{-2V(x)}, \\ f_0^-(-\sqrt{v^2 + 2V(x)}) & \text{si } v \leq -\sqrt{-2V(x)}, \\ f_T(\sqrt{-v^2 - 2V(x)}) & \text{si } |v| < \sqrt{-2V(x)}, \end{cases} \quad (4.19)$$

et V forment une solution de (4.16) au sens des distributions. De plus, toute solution avec V négatif et s'annulant au bord est de la forme ci-dessus.

Les points « surprenants » du théorème 4.3 sont que :

- il y a une grande liberté de choix pour le potentiel V . En particulier, il n’y a pas de borne a priori sur sa valeur minimale.
- la densité des particules piégées ne dépend que des conditions initiales, et pas du potentiel V .

Ce sont des différences importantes avec le problème stationnaire similaire pour Vlasov-Poisson.

4.2 Limites gyro-cinétiques avec rayon de Larmor fini

Je décris dans cette section les résultats obtenus dans l’article [GHN09] écrit en collaboration avec Philippe Ghendrih et Anne Nouri, et dans l’article [HN11], écrit avec cette dernière. Le point de départ est l’équation de Vlasov

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \frac{Ze}{m_i} (E(t, x) + v \times B) \cdot \nabla_v f = 0, \quad (4.20)$$

écrite avec les constantes physiques Z, e, m_i , et les champs électriques E et magnétiques B .

Quand le champ magnétique B est très fort, les particules chargées ont un mouvement de rotation rapide autour de ces lignes de champ. Le rayon de ces trajectoires circulaires est appelé rayon de Larmor, noté ici ρ_L , et est égal à

$$\rho_L = \frac{m_i |v_\perp|}{Ze |B|},$$

où v_\perp désigne la composante perpendiculaire au champ magnétique de la vitesse.

Dans la limite d’un champ magnétique très fort ($|B| \rightarrow +\infty$), le rayon des trajectoires tend alors vers 0. Plusieurs études mathématiques ont déjà été faites dans cette limite appelée centre-guide – par exemple [Gre97, GSR03] – souvent couplée à une limite quasi-neutre.

Mais les physiciens sont aussi très intéressés par le régime « rayon de Larmor fini », où l’on change d’échelle d’espace dans la direction perpendiculaire aux lignes de champ magnétique L_\perp uniquement, de manière à rester à l’échelle du rayon de Larmor : $L_\perp \sim \rho_L$. Cela introduit quelques difficultés car on doit alors jongler avec deux échelles d’espace suivant les directions (parallèles ou perpendiculaires), mais c’est un choix pertinent physiquement, car la turbulence qu’on observe expérimentalement et numériquement au coeur des plasmas de fusion commence à l’échelle du rayon de Larmor, et car c’est aussi la bonne échelle pour observer les phénomènes dit de dérive des particules qui

s'éloignent lentement des lignes de champs magnétique. Il est donc important d'avoir un modèle qui prend en compte ces deux échelles. Plusieurs mathématiciens, par exemple Frénod et Sonnendrücker [FS00], et Bostan [Bos09] ont travaillé sur ce régime.

Le modèle limite attendu. Pour simplifier le problème, on se place dans une géométrie plate, c-à-d que le champ magnétique extérieur est supposé homogène et dirigé selon la première direction. On écrit aussi son intensité ε^{-1} , ce qui veut dire que $B_{ext} = (\frac{1}{\varepsilon}, 0, 0)$. Après un adimensionnement, et en négligeant le champ magnétique auto-induit, l'équation de Vlasov dans le régime rayon de Larmor fini (FLR) peut s'écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_{\parallel} \cdot \partial_{x_{\parallel}} f + E \cdot \nabla_v f + \frac{1}{\varepsilon} (v_{\perp} \cdot \nabla_{x_{\perp}} f + v^{\perp} \cdot \nabla_{v_{\perp}} f) = 0, \quad (4.21)$$

Pour écrire le modèle limite, il est pertinent d'introduire les coordonnées gyro-centrées :

$$x_g = x + v^{\perp}, v_g = v, \quad \text{avec } v^{\perp} := (0, -v_3, v_2),$$

et l'opérateur de Bessel d'ordre 0

$$[J_{\rho_L}^0 h](x_g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x_g + \rho_L e^{i\varphi_c}) d\varphi_c, \quad (4.22)$$

qui permet de faire des moyennes le long des trajectoires circulaires parcourues très rapidement par les particules. La notation $e^{i\varphi_c}$ désigne le vecteur $(0, \cos \varphi_c, \sin \varphi_c)$. Une version position-vitesse est aussi utile pour traiter le problème de la couche initiale en temps :

$$[\tilde{J}_{\rho_L}^0 g](x_g, \rho_L, v_{\parallel}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x_g + \rho_L e^{i\varphi_c}, \rho_L e^{i(\varphi_c - \frac{\pi}{2})} + v_{\parallel} e_{\parallel}) d\varphi_c, \quad (4.23)$$

avec $e_{\parallel} = (0, 0, 1)$.

Le modèle limite attendu est écrit pour une distribution \bar{f} en coordonnées gyro-centrées :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + v_{\parallel} \partial_{x_{\parallel}} \bar{f} + J_{\rho_L}^0 E_{\parallel} \partial_{v_{\parallel}} \bar{f} + (J_{\rho_L}^0 E_{\perp})^{\perp} \cdot \nabla_{x_g} \bar{f} = 0. \quad (4.24)$$

Un résultat rigoureux dans le cas linéaire. Si le champ électrique est supposé extérieur (on néglige l'auto-interaction), alors on peut donner un résultat de convergence rigoureux dans le régime FLR.

Théorème 4.4. *On suppose que les conditions initiales f_ε^0 sont uniformément bornées dans L^q ($q > 1$), qu'elles convergent faiblement vers $f^0 \in L^q$, et que $E = -\nabla\Phi$ appartient à $L_t^1(L_x^p)$ avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Alors pour une certaine sous-suite (ε_n) , $(f_\varepsilon(t, x_g - v^\perp, v))$ converge faiblement vers \bar{f} in $L^\infty(L_{x,v}^q)$, où \bar{f} dépend seulement de $(t, x_g, v_\parallel, |v_\perp| = \rho_L)$ et est solution de (4.24) avec la donnée initiale $\tilde{J}_{\rho_L}^0 f^0$.*

Si de plus, $J_{\rho_L}^0 E \in BV(\mathbb{R}^3)$, pour presque tout $\rho_L > 0$, alors l'extraction est inutile, et \bar{f} est l'unique solution dans $L^\infty(L^q)$ de (4.24) avec condition initiale $\tilde{J}_{\rho_L}^0 f^0$.

Ce type de résultat a un important intérêt numérique, car la dynamique limite est posé sur un espace de dimension cinq, avec en plus une variable $|v_\perp|$ qui n'a pas de dynamique : on parle de modèle $4D + 1D$, qui est évidemment beaucoup moins coûteux en temps de calcul que le modèle $6D$ originel, du fait qu'il est posé sur un espace de dimension inférieur, et aussi parce qu'il ne contient plus de terme d'ordre ε^{-1} .

Une justification heuristique plus simple de l'équation d'électro-neutralité. Dans les modèle utilisés pour les plasma de Tokamak, l'équation de Vlasov-FLR (4.24) est couplée non pas avec une équation de type Poisson, mais avec une équation de quasi-neutralité. En effet, la longueur de Debye y est en général bien inférieur au rayon de Larmor. Les physiciens utilisent donc en général une équation de quasi-neutralité plus compliquée que celle utilisée dans la section précédente, qui prend en compte des réponses adiabatiques des ions et des électrons. Le potentiel électrique V satisfait :

$$\left(V - \int V(x, y, z) dz \right) + \frac{T_e}{T_i} \int (V - (J_{\rho_L}^0)^2 V) h_i(\rho_L) d\rho_L = \frac{T_e}{e} \left(\int J_{\rho_L}^0 (\bar{f}(t, x, \rho_L, v_\parallel)) 2\pi \rho_L d\rho_L dv_\parallel - 1 \right). \quad (4.25)$$

Les opérateurs de Bessel qui apparaissent sont dus au changement de variable pour passer en coordonnées gyro-centrées : \bar{f} est écrite en dans ces coordonnées, alors que l'équation de quasi-neutralité est posé sur l'espace physique, dans les coordonnées originelles. Nous avons proposé une nouvelle justification pour cette équation, basée sur des considérations géométriques. Enfin, l'article [GHN09] se termine par une étude de l'unicité des solutions de (4.24) stationnaires et homogènes par rapport aux directions perpendiculaires dans certains régimes particuliers : précisément avec des conditions qui assurent essentiellement l'impossibilité de pièger des particules, et donc empêchent l'apparition d'ondes de type BGK.

Le régime FLR avec du bruit. Dans l'article [HN11], on étudie le régime Rayon de Larmor Fini, en ajoutant un opérateur de collision très simple, de type Fokker-Planck linéaire. Le point de départ est donc l'équation de Vlasov-Fokker-Planck adimensionnée ci-dessous :

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + v_\parallel \partial_{x_\parallel} f_\varepsilon + E \cdot \nabla_v f_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (v_\perp \cdot \nabla_{x_\perp} f_\varepsilon + v^\perp \cdot \nabla_{v_\perp} f_\varepsilon) = \operatorname{div}_v (\beta v f_\varepsilon) + \nu \Delta_v f_\varepsilon, \quad (4.26)$$

Le modèle limite attendu, écrit comme dans les paragraphes précédents pour une distribution \bar{f} en coordonnées gyro-centrées est le suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{f} + v_\parallel \partial_{x_\parallel} \bar{f} + J_u^0 E_\parallel \partial_{v_\parallel} \bar{f} + (J_u^0 E)^\perp \cdot \nabla_{x_g} \bar{f} = \\ \beta (v_\parallel \partial_{v_\parallel} \bar{f} + u \partial_u \bar{f} + 3\bar{f}) + \nu \left(\Delta_{x_{g\perp}} \bar{f} + \frac{1}{u} \partial_u (u \partial_u \bar{f}) \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Notre résultat précis est le suivant :

Théorème 4.5. *Soit $E \in L_t^\infty(L^2)$ et f_ε une famille de solutions de (4.26) avec une condition initiale fixe $f_0 \in L^2$ et uniformément dans $L^\infty(L^2)$. Alors la famille \bar{f}_ε définie par*

$$\bar{f}_\varepsilon(t, x_g, v) = f(t, x_g + v^\perp, v)$$

admet une sous-suite convergeant au sens des distributions vers une fonction \bar{f} dépendant seulement de $(t, x_g, u = |v|, v_\parallel)$ et solution de (4.27) au sens des distributions avec une condition initiale $\bar{J}_u^0 f_0$.

On voit donc que dans le modèle limite (4.27), une diffusion dans les variables de position perpendiculaire aux lignes de champ magnétique apparaît. La diffusion limite est donc de dimension cinq, alors que la diffusion originelle était de dimension 3. En quelque sorte le mouvement de rotation rapide augmente la diffusion du système. Pour autant, il est difficile de comprendre exactement ce phénomène avec seulement des résultats de convergence faible. Dans un travail en cours de rédaction avec Aurélien Klak, on essaie de quantifier ces résultats pour comprendre plus en détail pourquoi et comment la diffusion est « augmentée » dans le régime FLR.

Caractère bien posé du modèle limite avec bruit. On étudie ensuite le modèle limite (4.27) dans un cadre homogène dans la direction parallèle (aux lignes de champ magnétique), couplé avec l'équation d'électroneutralité (4.25). Précisément, on obtient après quelques transformations le

modèle :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + (J_u^0 \nabla_x \Phi)^\perp \cdot \nabla_x \bar{f} = \beta u \partial_u \bar{f} + 2\beta \bar{f} + \nu \left(\Delta_x \bar{f} + \frac{1}{u} \partial_u (u \partial_u \bar{f}) \right), \quad (4.28)$$

$$(\Phi - \Phi *_x H_T)(t, x) = T(\rho(t, x) - 1), \quad (4.29)$$

$$\rho(t, x) = \int J_u^0 \bar{f}(t, x, u) 2\pi u du, \quad (4.30)$$

où

$$H_T(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4T}}}{2\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{T} |x|}. \quad (4.31)$$

On étudie plus particulièrement la dynamique perpendiculaire car il y a deux sources de régularités dans cette direction : la diffusion et l'opérateur de Bessel, qui laissent espérer des possibles résultats d'existence et d'unicité sur le système (4.28)-(4.31).

En fait, nous avons obtenu les résultats ci-dessous d'existence globale et d'unicité locale, qui utilisent pour \bar{f} dépendant de $(x, u) \in \Omega = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^+$ les notations

$$\|\bar{f}\|_{2,u}^2 = \int \|\bar{f}(\cdot, u)\|_2^2 2\pi u du, \quad \|\bar{f}\|_{2,m}^2 = \int \|\bar{f}(\cdot, u)\|_2^2 2\pi u (1 + u^2) du.$$

Théorème 4.6. *Supposons que \bar{f}_0 satisfait $\|\bar{f}_0\|_{2,m} < +\infty$. Alors il existe au moins une solution $\bar{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L_u^2(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, H_u^1(\Omega))$ de (4.28)-(4.30) avec condition initiale \bar{f}_0 , qui satisfait en outre certaines estimées à priori.*

Théorème 4.7. *Soit une donnée initiale \bar{f}_0 satisfaisant*

$$\|\bar{f}_0\|_{2,m} + \|\nabla_x \bar{f}_0\|_{2,m} < +\infty.$$

Alors il existe un temps τ^ tel que la solution faible de (4.28)-(4.30), définie au théorème 4.6, est unique sur $[0, \tau^*]$.*

De plus, cette solution est stable sur $[0, \tau^]$ au sens suivant. Si $(\bar{f}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de solutions données par le théorème 4.6 avec des conditions initiales f_0^n satisfaisant*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\bar{f}_0^n - \bar{f}_0\|_{2,m} = 0, \quad \text{et} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\bar{f}_0^n\|_{L_m^2(L^4)} < +\infty,$$

et toutes définies jusqu'au temps τ^ . Alors*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0, \tau^*]} \|\bar{f}^n(t) - \bar{f}(t)\|_{2,m} = 0.$$

Dans le cas $\beta = 0$, on peut aussi montrer l'unicité et la stabilité globale en temps pour des données petites.

Chapitre 5

Décohérence via un modèle quantique simple de collision

5.1 Un modèle simplifié pour décrire une collision.

Dans ce section, je résume l'article soumis [AHN13] écrit en collaboration avec Riccardo Adami et Claudia Negulescu.

Notre premier objectif était d'obtenir une description simple d'une collision entre une particule lourde quantique, et une particule de son environnement extérieur beaucoup plus légère et rapide. Si on note ε le ratio entre les masses des deux particules, on peut écrire pour l'évolution de la fonction d'onde ψ_ε du système (X position de la particule lourde, et x celle de la légère) une équation de Schrödinger adimensionnée :

$$\begin{cases} i\partial_t\psi_\varepsilon = -\frac{1}{2}\Delta_X\psi_\varepsilon - \frac{1}{2\varepsilon}\Delta_x\psi_\varepsilon + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}V(x-X)\psi_\varepsilon, \\ \psi_\varepsilon(0, X, x) = \psi_0^L(X)\chi(x). \end{cases} \quad (5.1)$$

A noter qu'on a multiplié le potentiel d'interaction V par un facteur $\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$. Le ε du dénominateur est nécessaire pour obtenir une limite non triviale (le facteur $1+\varepsilon$ au numérateur rend les choses plus commodes, mais pourrait être remplacé par 1). Dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, la particule légère devient infiniment rapide, et la collision devient instantanée. Si on ne s'intéresse vraiment qu'à la particule lourde, on peut écrire une équation attendue sur son opérateur de densité ρ_ε^L :

$$\rho_\varepsilon^L := \text{Tr}_l |\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_\varepsilon|,$$

avec des notations empruntées à la physique (Tr_l désignant la trace partielle sur l'état de la particule légère), ce qui correspond en terme de noyau intégral

à

$$\rho_\varepsilon^L(t, X, X') = \int \psi_\varepsilon(t, X, x) \overline{\psi_\varepsilon(t, X', x)} dx.$$

Cette particule lourde a en effet une évolution libre après la collision, et la collision modifie juste son opérateur de densité initial. Précisément, le modèle limite est le suivant :

$$\begin{cases} i\partial_t \rho_a^L(t) &= [H_0, \rho_a^L(t)], \\ \rho_a^L(0) &:= \mathcal{I}_\chi^V \rho^L(0) = \mathcal{I}_\chi^V [|\psi^L(0)\rangle\langle\psi^L(0)|], \end{cases} \quad (5.2)$$

où $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$ est l'Hamiltonien libre et l'opérateur \mathcal{I}_χ^V est défini ainsi :

Définition 5.1 (Opérateur de collision). *Supposons que l'opérateur de diffraction S associé au potentiel V est bien défini. Alors pour tout état χ de la particule légère, on définit l'opérateur de collision*

$$\mathcal{I}_\chi^V : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d), \quad \rho^L \mapsto \text{Tr}_l(\rho^L \otimes |S_V^X \chi\rangle\langle S_V^{X'} \chi|), \quad (5.3)$$

où S_V^X désigne l'opérateur de diffraction associé au potentiel $V(\cdot - X)$, avec une particule lourde localisée en X .

On peut vérifier que l'opérateur \mathcal{I}_χ^V est bien défini, complètement positif (en particulier il préserve la positivité). De plus, il satisfait

$$\text{Tr} |\mathcal{I}_\chi^V \rho^M| \leq \text{Tr} |\rho^M|. \quad (5.4)$$

En terme de noyau intégral, l'action de l'opérateur \mathcal{I}_χ^V s'écrit :

$$[\mathcal{I}_\chi^V \rho](X, X') = \rho(X, X') I_\chi^V(X, X') \quad (5.5)$$

où la *fonction de collision* I_χ^V est définie par

$$I_\chi^V(X, X') := \langle S_V^{X'} \chi | S_V^X \chi \rangle, \quad X, X' \in \mathbb{R}^d. \quad (5.6)$$

Notre résultat rigoureux sur la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ est le suivant. On y utilise le propagateur libre de la particule légère $U - 0(t) = e^{-itH_0}$

Théorème 5.1. *On suppose que l'opérateur de diffraction S_V est bien défini et satisfait l'hypothèse de régularité suivante pour un $s \in \mathbb{R}$ et une constante $C > 0$:*

$$\forall \chi \in L^2(\mathcal{R}^d), \quad \||x| S_V \chi\|_2 \leq \||x| \chi\|_2 + C_s \|\chi\|_{H^s}.$$

Soient $\psi^L \in L^2$ et $\chi \in L^2$, et $\gamma \in (0, 1)$. On désigne par $\psi_\varepsilon(t)$ l'unique solution de (5.1) associée à la condition initiale $\psi^L \otimes U_0(-\varepsilon^\gamma)\chi$, par $\rho_\varepsilon^L(t)$

l'opérateur de densité (de la particule lourde) associée, et par $\rho_a^L(t)$ l'unique solution du problème (5.2). Alors on a l'estimation suivante :

$$\|\rho_\varepsilon^L(t) - \rho_a^L(t)\|_{\mathcal{L}^1} \leq C_1 \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} t - \varepsilon^{-\gamma}, \varepsilon^{-\gamma} \right) + C_2 \varepsilon + C_3 \varepsilon^{1-\gamma}, \quad (5.7)$$

où les constantes C_i sont définies par :

$$\begin{aligned} C_1(\tau, \tau') &:= \|\psi^L[S(\tau, \tau') - S]\chi(\cdot - X)\|_2 \\ C_2 &:= 2\sqrt{2}(\|\nabla\psi^L\|_2\|x|\chi\|_2 + \|X|\psi^L\|_2\|\nabla\chi\|_2 + \|X \cdot \nabla\psi^L\|_2 + \|x \cdot \nabla\chi\|_2) \\ &\quad + \sqrt{2}C_s(\|\nabla\psi^L\|_2\|\chi\|_{H^s} + \|\chi\|_{H^{s+1}}) \\ C_3 &:= 2\sqrt{2}(\|\nabla\psi^L\|_2\|\nabla\chi\|_2 + 2\|\Delta\chi\|_2). \end{aligned}$$

Dans cet énoncé, $S_V(\tau, \tau') = U_0(-\tau)U_V(\tau + \tau')U_0(-\tau')$ est l'opérateur de diffraction partiel, défini à l'aide des groupes unitaires associés respectivement au transport libre et au potentiel V . Par définition de l'opérateur de diffraction, $\lim_{\tau, \tau' \rightarrow +\infty} S_V(\tau, \tau') = S_V$.

Ce théorème ne donne donc pas une vitesse explicite de convergence pour la limite étudiée ici, mais il relie celle-ci à la vitesse de convergence de l'opérateur de diffraction, qui est plus simple à obtenir. Un exemple en est traité dans l'article : le cas du potentiel de Dirac en dimension 1.

On notera également qu'on peut parfaitement adapter ce théorème au cas où la particule lourde et/ou la particule légère sont initialement dans un état mélangé, mais sans être intriquées ensemble (c-à-d sans histoire commune). Cette dernière restriction est particulièrement importante.

Une étude de l'opérateur de décohérence en dimension 1. L'intérêt de notre étude par rapport aux travaux précédents sur le même sujet [DFT04, AFFT04, CCF05, AFFT06] est que le modèle limite est plus simple à utiliser. Par exemple en dimension 1, on peut directement calculer l'opérateur de collision \mathcal{I}_χ^V et la fonction associée I_χ^V en fonction des amplitudes de réflexion et de transmission r_k et t_k associées au potentiel V :

$$I_\chi(X, X') = 1 - \Theta_\chi(X - X') + i\Gamma_\chi(X) - i\Gamma_\chi(X'), \quad (5.8)$$

avec les définitions :

$$\Theta_\chi(Y) := \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{2ikY}) |r_k|^2 |\widehat{\chi}(k)|^2 dk, \quad (5.9)$$

$$\Gamma_\chi(X) := i \int_{\mathbb{R}} e^{2ikX} \overline{r_{-k}} t_k \overline{\widehat{\chi}(-k)} \widehat{\chi}(k) dk. \quad (5.10)$$

Si on utilise un paquet d'onde Gaussien pour la particule de l'environnement,

$$\chi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{(x-x_l)^2}{4\sigma^2} + ipx}, \quad (5.11)$$

alors les formules ci-dessus se simplifient en :

$$\begin{aligned} \Theta_{\sigma,p}(Y) &= \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{2ikY}) |r_k|^2 e^{-2\sigma^2(k-p)^2} dk, \\ \Gamma_{\sigma,p}(X) &= i\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2\sigma^2 p^2} \int_{\mathbb{R}} t_k \overline{r_{-k}} e^{-2\sigma^2 k^2 + 2ik(X-x_l)} dk. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ceal permet d'utiliser des approximations raisonnables pour des paquets d'onde Gaussien avec un spectre en vitesse suffisamment étroit :

$$\Theta_{\sigma,p}^{app}(Y) = |r_p|^2 \left(1 - e^{2ipY - \frac{Y^2}{2\sigma^2}} \right). \quad (5.13)$$

$$|\Gamma_{\sigma,p}(X)| \leq e^{-2\sigma^2 p^2} \quad (5.14)$$

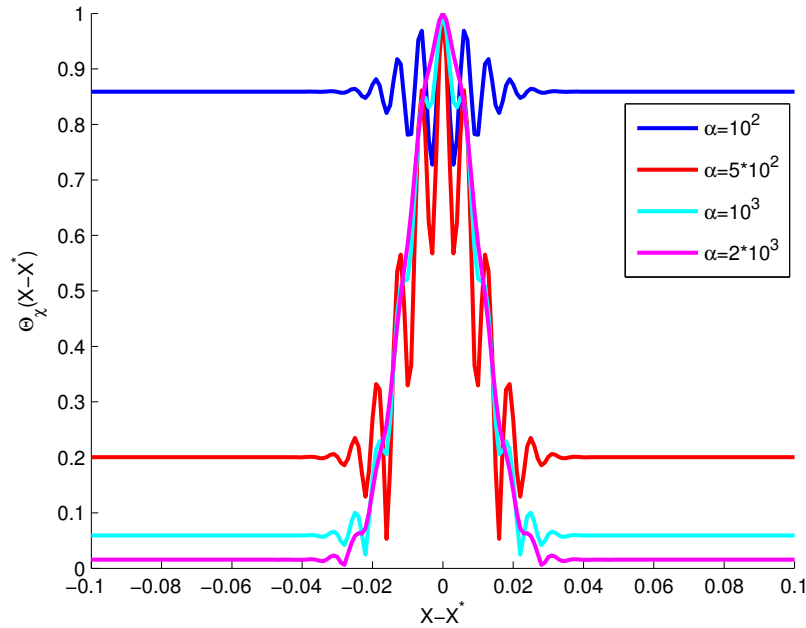


FIGURE 5.1 – Représentation de $|I_{\chi}(X, -X)| \simeq 1 - \Theta(2X)$ pour un potentiel de Dirac de force α variable.

Les formules (5.12) permettent également de rapides calculs numériques des quantités en question. Cette rapidité de calcul permet d'effectuer des simulations peu coûteuses en temps de calcul. Prenons l'exemple un l'opérateur de densité d'une particule lourde localisée simultanément en deux endroits, avec deux bosses qui se dirigent l'une vers l'autre :

$$\begin{aligned} \rho_0^M(0, X, X') &= N^2 [\varphi_-(X) + \varphi_+(X)] [\overline{\varphi_-(X')} + \overline{\varphi_+(X')}] \quad (5.15) \\ \varphi_{\pm}(X) &:= \frac{1}{(2\pi)^{1/4} \sqrt{\sigma_H}} e^{-\frac{(X \mp X_0)^2}{4\sigma_H^2}} e^{\mp i p_H X} \end{aligned}$$

Les paramètres X_0 , p_H and σ_H sont positifs, N est un facteur de normalisation, proche de 1 si les bosses sont suffisamment éloignées.

Numériquement, l'opérateur de densité avant et immédiatement après la collision est représenté sur la figure 5.2. On observe une atténuation des termes hors-diagonale.

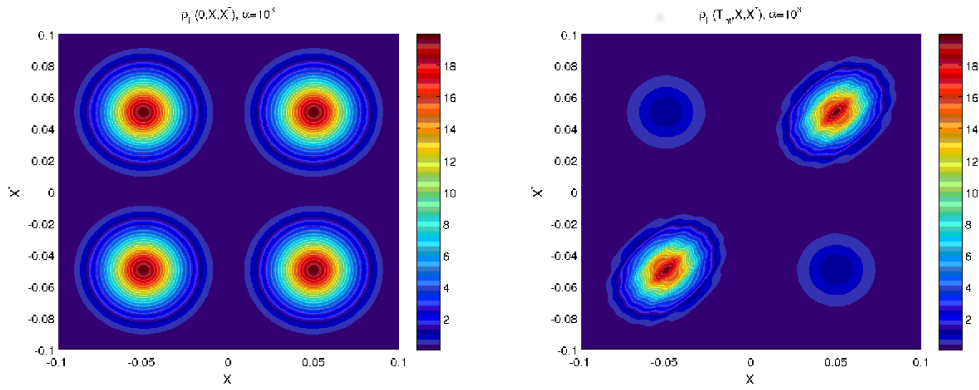


FIGURE 5.2 – Cas test : Potentiel de Dirac avec $\alpha = 10^3$. Gauche : $|\rho_0^L(X, X')|$ avant collision ; Droite : $|\rho^{M,a}(0, X, X')|$ immédiatement après la collision.

Ensuite, on laisse évoluer librement la particule lourde, jusqu'à la superposition de ses deux bosses. Sans interaction avec l'extérieur, on devrait observer des franges d'interférence parfaites. Mais Figure 5.3, on voit plutôt ce qu'on observe au moment de la superposition : les franges d'interférence sont atténuées, et une autre bosse sans interférence apparaît.

Ceci peut-être expliqué rigoureusement grâce au théorème précédent. En effet, sous certaines conditions (bosses suffisamment éloignées, ...) on peut utiliser l'approximation :

$$I_X(X, X') \approx \begin{cases} 1 - |r_p|^2 & \text{si } |X - X'| \gg \sigma \\ 1 - |r_p|^2 + |r_p|^2 e^{2ip(X-X')} & \text{si } |X - X'| \ll \sigma. \end{cases}$$

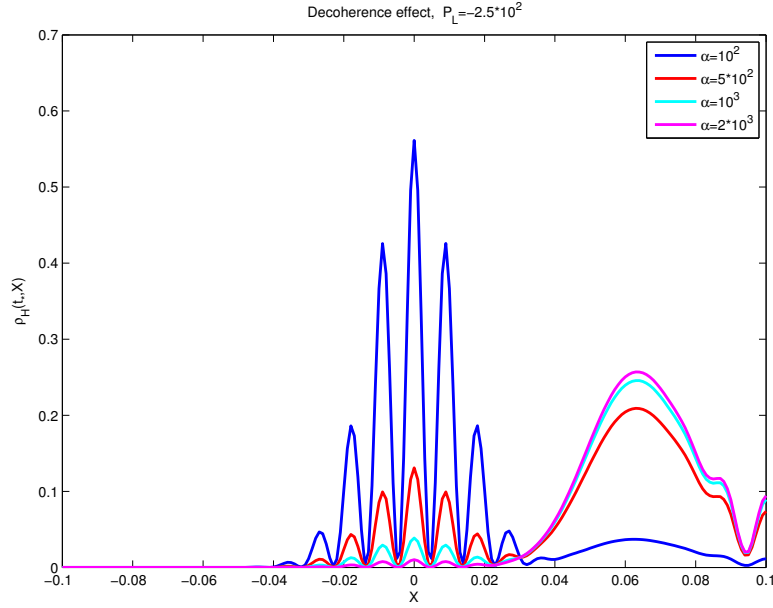


FIGURE 5.3 – Atténuation des interférences de la particule lourde, dans le cas d'une particule légère venant de la gauche avec $p = 2.5 * 10^2$.

au lieu de (5.13), et cela donne l'approximation suivante pour l'opérateur de densité :

$$\begin{aligned} \rho_b^M(0, X, X') := & |t_p|^2 \rho_0^M(X, X') + \frac{|r_p|^2}{2} e^{2ipX} \varphi_-(X) \overline{e^{2ipX'} \varphi_-(X')} \\ & + \frac{|r_p|^2}{2} e^{2ipX} \varphi_+(X) \overline{e^{2ipX'} \varphi_+(X')}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Cet état approché $\rho_b^M(0)$ peut-être interprété comme le *mélange statistique* de trois états purs :

- l'état pur initial $\rho^M(0)$ avec probabilité $|t_p|^2$;
- l'état pur représenté par la fonction d'onde $e^{2ip} \varphi_-$, donc une particule lourde localisée à gauche et accélérée de $2p$, avec probabilité $\frac{1}{2}|r_p|^2$;
- l'état pur représenté par la fonction d'onde $e^{2ip} \varphi_+$, donc une particule lourde localisée à droite et accélérée de $2p$, avec probabilité $\frac{1}{2}|r_p|^2$.

Et plus précisément, si on regarde la fonction d'onde des deux particules après l'interaction, on peut montrer que chacun des états de la particule lourde est associée à un état particulier de la particule légère :

- Quand la lourde est encore dans son état initial, la légère a été transmise,
- Quand la lourde est à gauche, la légère a été réfléchi depuis la position la plus à gauche de la lourde,

- Quand la lourde est à droite, la légère a été réfléchi depuis la position la plus à droite de la lourde.

Cette nouvelle décomposition (5.16) permet d'interpréter les résultats numériques de la figure 5.3. Les franges d'interférence correspondent en effet à la proportion de la particule qui n'a pas changé d'état malgré la collision, et la bosse sur la gauche correspond en fait au mélange des deux bosses accélérées, qui ne sont plus cohérentes entre elles et ne présente donc pas d'interférences. Il faut noter qu'au moment où les interférences se forment, ces deux bosses sont aussi superposées car elles se rencontrent en même temps (elles ont été accélérées les deux de la même quantité, et l'instant de leur « collision » n'a donc pas été modifié).

On peut même quantifier exactement les approximations faites ci-dessus. Précisément :

Théorème 5.2. *Supposons que l'état initial de la particule lourde ψ^L est de la forme (5.15), et que l'état entrant χ de la particule légère est choisit comme dans (5.11). On désigne par $\rho_a^L(0)$ l'opérateur de densité juste après la collision, voir (5.2), et par $\rho_b^L(0)$ l'opérateur de densité dont le noyau intégral est donné par (5.16). Alors on a l'estimation suivante :*

$$\|\rho_a^L(0) - \rho_b^L(0)\|_{\mathcal{L}^1} \leq C \left(e^{-\sigma^2 p^2} + \frac{1}{\sigma} \left\| \frac{d|r_k|^2}{dk} \right\|_{\infty} + \frac{\sigma_H}{\sigma} + e^{-\frac{2X_0^2}{\sigma^2}} + e^{-\frac{X_0^2}{2\sigma_H^2}} \right) \quad (5.17)$$

Pour conclure, l'intérêt de cette étude d'un cas simple est de donner des explications détaillées quantifiées aux arguments initialement développés par Joos et Zeh [Zeh70, JZ85] pour expliquer la décohérence par collisions (ou interactions). Cette brique pourrait être utiliser ensuite comme élément de base dans des travaux futurs, comme ceux décrit rapidement dans la section suivante.

5.2 Vers des modèles de décohérence en environnement aléatoire.

Le modèle de collision instantanée peut-être utilisé pour obtenir des modèles de décohérence « continus ». Ce type de modèle est maintenant bien connu en physique, souvent sous le nom d'équation de Lindblad ou d'équation maîtresse, mais à ma connaissance il n'existe pas encore de dérivation mathématiquement rigoureuse de ce type de modèle. L'objectif d'un travail en cours avec Christophe Gomez est d'obtenir une dérivation d'une équation

maîtresse, en partant de notre description instantannée d'une collision, et en passant à une limite en grand nombre de collision avec chacune un effet de plus en plus faible. Le modèle utilisé pour décrire ces collisions multiples est le suivant :

$$i\partial_t \rho_N = [H_0, \rho_N] + \sum_i \delta_{T_i}(t) (\mathcal{I}_{p_i, \sigma_i, x_i} - 1) \rho_N, \quad (5.18)$$

où \mathcal{I} désigne toujours l'opérateur défini en (5.3), mais utilisé cette fois-ci avec des particules de l'environnement Gaussiennes de paramètres aléatoires p_i, σ_i, x_i . Les T_i sont aussi des temps aléatoires, que l'on choisit Poissonniens avec intensité N .

En prenant la bonne échelle pour l'intensité du potentiel d'interaction, il semblerait que l'on obtienne comme modèle limite une version stochastique de l'équation de Lindblad [Lin76]. L'équation de Lindblad étant déjà celle du générateur d'un semi-groupe quantique, cela veut dire que notre modèle limite correspond à une marche aléatoire quantique en milieu aléatoire, ce qui semble relativement nouveau d'un point de vue mathématique. Mais le modèle recuit (ou « annealed ») associé correspond bien au cas plus classique du générateur standard de Lindblad.

Bibliographie

- [AFFT04] R. Adami, R. Figari, D. Finco, and A. Teta. On the asymptotic behaviour of a quantum two-body system in the small mass ratio limit. *J. Phys. A*, 37(30) :7567–7580, 2004.
- [AFFT06] R. Adami, R. Figari, D. Finco, and A. Teta. On the asymptotic dynamics of a quantum system composed by heavy and light particles. *Comm. Math. Phys.*, 268(3) :819–852, 2006.
- [AHN13] R. Adami, M. Hauray, and C. Negulescu. Decoherence for a heavy particle interacting with a light one : new analysis and numerics. arXiv :1310.7199, 2013.
- [Arn65] V. I. Arnold. On conditions for non-linear stability of plane stationary curvilinear flows of an ideal fluid. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 162 :975–978, 1965.
- [Arn66] V. I. Arnold. An a priori estimate in the theory of hydrodynamic stability. *Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika*, 1966(5 (54)) :3–5, 1966.
- [BA94] M. Ben-Artzi. Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 128(4) :329–358, 1994.
- [BFJJ13] M. Bossy, J. Fontbona, P.-E. Jabin, and J.-F. Jabir. Local existence of analytical solutions to an incompressible Lagrangian stochastic model in a periodic domain. *Comm. Partial Differential Equations*, 38(7) :1141–1182, 2013.
- [BG94] Y. Brenier and E. Grenier. Limite singulière du système de Vlasov-Poisson dans le régime de quasi neutralité : le cas indépendant du temps. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 318(2) :121–124, 1994.
- [BGK57] I. B. Bernstein, J. M. Greene, and M. D. Kruskal. Exact non-linear plasma oscillations. *Phys. Rev. (2)*, 108 :546–550, 1957.

- [BHJ10] J. Barré, M. Hauray, and P. E. Jabin. Stability of trajectories for N -particle dynamics with a singular potential. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 7 :5–+, July 2010.
- [BJ08] J. Barré and P. E. Jabin. Free transport limit for N -particles dynamics with singular and short range potential. *J. Stat. Phys.*, 131(6) :1085–1101, 2008.
- [BMM13] J. Bedrossian, N. Masmoudi, and C. Mouhot. Landau damping : paraproducts and Gevrey regularity. *arXiv preprint arXiv :1311.2870*, 2013.
- [BN12] C. Bardos and A. Nouri. A Vlasov equation with Dirac potential used in fusion plasmas. *J. Math. Phys.*, 53(11) :115621–115621, 2012.
- [Bos09] M. Bostan. The Vlasov-Poisson system with strong external magnetic field. Finite Larmor radius regime. *Asymptot. Anal.*, 61(2) :91–123, 2009.
- [BR93] J. Batt and G. Rein. A rigorous stability result for the Vlasov-Poisson system in three dimensions. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 164 :133–154, 1993.
- [Bre89] Y. Brenier. A Vlasov-Poisson type formulation of the Euler equations for perfect incompressible fluids. *Rapport de recherche INRIA*, 1989.
- [Bre00] Y. Brenier. Convergence of the Vlasov-Poisson system to the incompressible Euler equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 25(3-4) :737–754, 2000.
- [CCD02] M. J. Cáceres, J. A. Carrillo, and J. Dolbeault. Nonlinear stability in L^p for a confined system of charged particles. *SIAM J. Math. Anal.*, 34(2) :478–494 (electronic), 2002.
- [CCF05] C. Cacciapuoti, R. Carlone, and R. bossy Figari. Decoherence induced by scattering : a three-dimensional model. *J. Phys. A*, 38(22) :4933–4946, 2005.
- [CCH13] J. Carrillo, Y.-P. Choi, and M. Hauray. The derivation of swarming models : Mean-field limit and wasserstein distances. In Springer, editor, *Collective Dynamics from Bacteria to Crowds : An excursion through modeling, analysis and simulation*, pages 1–55, 2013.
- [CCLR⁺10] E. Carlen, M. Carvalho, J. Le Roux, M. Loss, and C. Villani. Entropy and chaos in the Kac model. *Kinet. Relat. Models*, 3(1) :85–122, 2010.

- [CDF⁺11] J. A. Carrillo, M. DiFrancesco, A. Figalli, T. Laurent, and D. Slepčev. Global-in-time weak measure solutions and finite-time aggregation for nonlocal interaction equations. *Duke Math. J.*, 156(2) :229–271, 2011.
- [CDL08] G. Crippa and C. De Lellis. Estimates and regularity results for the DiPerna-Lions flow. *J. Reine Angew. Math.*, 616 :15–46, 2008.
- [CLMP92] E. Caglioti, P.-L. Lions, C. Marchioro, and M. Pulvirenti. A special class of stationary flows for two-dimensional Euler equations : a statistical mechanics description. *Comm. Math. Phys.*, 143(3) :501–525, 1992.
- [CLMP95] E. Caglioti, P.-L. Lions, C. Marchioro, and M. Pulvirenti. A special class of stationary flows for two-dimensional Euler equations : a statistical mechanics description. II. *Comm. Math. Phys.*, 174(2) :229–260, 1995.
- [dF37] B. de Finetti. La prévision : ses lois logiques, ses sources subjectives. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 7(1) :1–68, 1937.
- [DF87] P. Diaconis and D. Freedman. A dozen de Finetti-style results in search of a theory. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 23(2, suppl.) :397–423, 1987.
- [DFT04] Detlef Dürr, Rodolfo Figari, and Alessandro Teta. Decoherence in a two-particle model. *J. Math. Phys.*, 45(4) :1291–1309, 2004.
- [DLS09] C. De Lellis and L. Székelyhidi. The Euler equations as a differential inclusion. *Ann. of Math. (2)*, 170(3) :1417–1436, 2009.
- [Fil88] A. F. Filippov. *Differential equations with discontinuous right-hand sides*, volume 18 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988. Translated from the Russian.
- [FNHM14] M. Fournier N. ; Hauray and S. Mischler. Propagation of chaos for the 2d viscous vortex model. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(7) :1423–1466, 2014.
- [FS00] E. Frénod and E. Sonnendrücker. Long time behavior of the two-dimensional Vlasov equation with a strong external magnetic field. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 10(4) :539–553, 2000.
- [GHN09] P. Ghendrih, M. Hauray, and A. Nouri. Derivation of a gyrokinetic model. Existence and uniqueness of specific stationary solution. *Kinet. Relat. Models*, 2(4) :707–725, 2009.

- [Gre95] E. Grenier. Defect measures of the Vlasov-Poisson system in the quasineutral regime. *Comm. Partial Differential Equations*, 20(7-8) :1189–1215, 1995.
- [Gre96] E. Grenier. Oscillations in quasineutral plasmas. *Comm. Partial Differential Equations*, 21(3-4) :363–394, 1996.
- [Gre97] E. Grenier. Pseudo-differential energy estimates of singular perturbations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 50(9) :821–865, 1997.
- [Gre99a] E. Grenier. Limite quasineutre en dimension 1. In *Journées “Équations aux Dérivées Partielles” (Saint-Jean-de-Monts, 1999)*, pages Exp. No. II, 8. Univ. Nantes, Nantes, 1999.
- [Gre99b] E. Grenier. On the derivation of homogeneous hydrostatic equations. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33(5) :965–970, 1999.
- [GS95] Y. Guo and W. A. Strauss. Nonlinear instability of double-humped equilibria. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 12(3) :339–352, 1995.
- [GSR03] F. Golse and L. Saint-Raymond. The Vlasov-Poisson system with strong magnetic field in quasineutral regime. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 13(5) :661–714, 2003.
- [GSRT14] I. Gallagher, L. Saint-Raymond, and B. Texier. From newton to boltzmann : hard spheres and short-range potentials. Zurich Advanced Lectures in Mathematics Series, 2014.
- [Hau09] M. Hauray. Wasserstein distances for vortices approximation of Euler-type equations. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 19(8) :1357–1384, 2009.
- [Hau13] M. Hauray. Mean field limit for the one dimensional vlasov-poisson equation. Séminaire Laurent Schwartz, École Polytechnique, 2013. arXiv :1309.2531.
- [Hén82] M. Hénon. Vlasov equation? *Astronom. and Astrophys.*, 114(1) :211–212, 1982.
- [HJ07] M. Hauray and P.-E. Jabin. N -particles approximation of the Vlasov equations with singular potential. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 183(3) :489–524, 2007.
- [HJ11] M. Hauray and P.-E. Jabin. Particles approximations of vlasov equations with singular forces : Propagation of chaos. to appear in *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, arXiv :1107.3821, 2011.
- [HK11] D. Han-Kwan. Quasineutral limit of the Vlasov-Poisson system with massless electrons. *Comm. Partial Differential Equations*, 36(8) :1385–1425, 2011.

- [HKH13] D. Han-Kwan and M. Hauray. Stability issues in the quasineutral limit of the one-dimensional vlasov-poisson equation. to appear in *Comm. Math. Phys.*, arXiv :1310.7199, 2013.
- [HM14] M. Hauray and S. Mischler. On Kac’s chaos and related problems. *J. Funct. Anal.*, 266(10) :6055–6157, 2014.
- [HMRW85] D. D. Holm, J. E. Marsden, T. Ratiu, and A. Weinstein. Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria. *Phys. Rep.*, 123 :1–2, July 1985.
- [HN11] M. Hauray and A. Nouri. Well-posedness of a diffusive gyrokinetic model. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 28(4) :529–550, 2011.
- [HS55] Edwin Hewitt and Leonard J. Savage. Symmetric measures on Cartesian products. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 80 :470–501, 1955.
- [JN11] P.-E. Jabin and A. Nouri. Analytic solutions to a strongly nonlinear Vlasov equation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 349(9-10) :541–546, 2011.
- [Jud63] V. I. Judovič. Non-stationary flows of an ideal incompressible fluid. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 3 :1032–1066, 1963.
- [Jud95] V. I. Judovič. Uniqueness theorem for the basic nonstationary problem in the dynamics of an ideal incompressible fluid. *Math. Res. Lett.*, 2(1) :27–38, 1995.
- [JZ85] E. Joos and H. D. Zeh. The emergence of classical properties through interaction with the environment. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 59 :223–243, June 1985.
- [Kac56] M. Kac. Foundations of kinetic theory. In *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954–1955, vol. III*, pages 171–197, Berkeley and Los Angeles, 1956. University of California Press.
- [Lin76] G. Lindblad. On the generators of quantum dynamical semi-groups. *Comm. Math. Phys.*, 48(2) :119–130, 1976.
- [Mas01] N. Masmoudi. From Vlasov-Poisson system to the incompressible Euler system. *Comm. Partial Differential Equations*, 26(9-10) :1913–1928, 2001.
- [Meh66] F. G. Mehler. Ueber die entwicklung einer function von beliebig vielen variablen nach laplaschen functionen höherer ordnungn. *Crelle’s Journal*, 66 :161–176, 1866.
- [MM13] S. Mischler and C. Mouhot. Kac’s program in kinetic theory. *Invent. Math.*, 193(1) :1–147, 2013.

- [MP86] C. Marchioro and M. Pulvirenti. A note on the nonlinear stability of a spatially symmetric Vlasov-Poisson flow. *Math. Methods Appl. Sci.*, 8(2) :284–288, 1986.
- [MS82] J. Messer and H. Spohn. Statistical mechanics of the isothermal Lane-Emden equation. *J. Statist. Phys.*, 29(3) :561–578, 1982.
- [MV11] C. Mouhot and C. Villani. On Landau damping. *Acta Math.*, 207(1) :29–201, 2011.
- [Osa85a] H. Osada. Moment estimates for parabolic equations in the divergence form. *J. Math. Kyoto Univ.*, 25(3) :473–488, 1985.
- [Osa85b] H. Osada. A stochastic differential equation arising from the vortex problem. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 61(10) :333–336, 1985.
- [Osa87a] H. Osada. Diffusion processes with generators of generalized divergence form. *J. Math. Kyoto Univ.*, 27(4) :597–619, 1987.
- [Osa87b] H. Osada. Limit points of empirical distributions of vortices with small viscosity. In *Hydrodynamic behavior and interacting particle systems (Minneapolis, Minn., 1986)*, volume 9 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 117–126. Springer, New York, 1987.
- [Osa87c] H. Osada. Propagation of chaos for the two-dimensional Navier-Stokes equation. In *Probabilistic methods in mathematical physics (Katata/Kyoto, 1985)*, pages 303–334. Academic Press, Boston, MA, 1987.
- [Pen60] O. Penrose. Electrostatic instability of a uniform non-Maxwellian plasma. *Phys. Fluids*, 3 :258–265, 1960.
- [Rei94] G. Rein. Non-linear stability for the Vlasov-Poisson system—the energy-Casimir method. *Math. Methods Appl. Sci.*, 17(14) :1129–1140, 1994.
- [RR67] D. Robinson and D. Ruelle. Mean entropy of states in classical statistical mechanics. *Comm. Math. Phys.*, 5 :288–300, 1967.
- [Sch93] V. Scheffer. An inviscid flow with compact support in space-time. *J. Geom. Anal.*, 3(4) :343–401, 1993.
- [Sch96] S. Schochet. The point-vortex method for periodic weak solutions of the 2-D Euler equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 49(9) :911–965, 1996.
- [Shn97] A. Shnirelman. On the nonuniqueness of weak solution of the Euler equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 50(12) :1261–1286, 1997.

- [Szn91] A.-S. Sznitman. Topics in propagation of chaos. In *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989*, volume 1464 of *Lecture Notes in Math.*, pages 165–251. Springer, Berlin, 1991.
- [Vil03] C. Villani. *Topics in optimal transportation*, volume 58 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [Zeh70] H. D. Zeh. On the interpretation of measurement in quantum theory. *Foundations of Physics*, 1 :69–76, March 1970.