Université de Provence 2009–2010

Mathématiques Générales 1

Devoir surveillé n° 1

Exercice 1 Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a) \qquad \exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad y - x > 0$$

$$(b) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad y - x > 0$$

$$(c) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad y - x > 0$$

$$(d) \qquad \exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2 - x > 0$$

1. Les assertions (a), (b), (c), (d) sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.
2. Donner les négations de ces assertions.

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \text{ lorsque } x^2 - y^2 = x - y \,.$$

1. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la classe de 0, puis de x_0 (nombre réel quelconque). Les classes ont-elles toutes le même cardinal ?

Exercice 3 Soient A, B, C, D des parties d'un ensemble E non vide telles que :

$$(1) A \cap B = C \cap D; \quad (2) C \cup D = E; \quad (3) C \subset A; \quad (4) D \subset B.$$

Prouver que $C = A$ puis que $D = B$.

Exercice 4 Montrer l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Exercice 5 Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, 3 divise $n^3 - n$

Exercice 6 Soit f une application de E vers F

1. Rappeler les définitions mathématiques de f injective et f surjective, puis exprimer que f n'est pas injective, et enfin que f n'est pas surjective. En déduire la définition mathématique de : f n'est pas bijective.
2. Prouver que si f de E dans F est une bijection, alors

$$\forall A \subset E, f(A^c) = f(A)^c.$$

Exercice 7 On considère l'application f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} \setminus \{-2\} & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x+2} \end{array}$$

1. Démontrer que f est injective mais pas surjective (en trouvant la valeur y_0 pour laquelle l'équation $f(x) = y_0$ n'a pas de solution).
2. Soit g l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} \setminus \{-2\} & \mapsto & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x+2} \end{array}$$

   Justifier que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.