

Mathématiques Générales 1

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Exercice 1 (3 points)

Donner la forme polaire de

$$\left(\frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 + \cos \theta - i \sin \theta} \right)^n$$

Exercice 2 (4 points) Equation complexe

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^6 + (7 - i)z^3 - 8 - 8i = 0$.

Exercice 3 (4 points) Fonctions usuelles

1. Etudier le signe de la fonction $g(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$.
2. Etudier la fonction :

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} e^{\arcsin(x)}$$

Tracer sommairement la courbe, avec les trois tangentes significatives.

Exercice 4 (5 points) Fonctions trigonométriques

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^5 = 1$ et exprimer les racines en fonction de $u = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.
2. Calculer la somme $1 + u + u^2 + u^3 + u^4$. En déduire que $1 + 2 \cos(\frac{2\pi}{5}) + 2 \cos(\frac{4\pi}{5}) = 0$.
3. En déduire une équation du second degré dont $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est solution, et en déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

Exercice 5 (4 points) Fonctions hyperboliques

1. Rappeler l'expression, la dérivée et les limites de la fonction sh. Tracer son graphe.
2. Retrouver l'expression de la fonction réciproque argsh avec les fonctions usuelles.
3. En déduire la dérivée de la fonction argsh.

Exercice 6 (3 points)

Soient a, b, c trois complexes. Montrer que si $|a| = |b| = |c| = 1$, alors $|ab + bc + ca| = |a + b + c|$.