Université de Provence | 2010–2011

Mathématiques Générales 1

Devoir surveillé n° 1

Exercice 1 Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ lorsque

$$\forall M > 0, \qquad \exists A > 0, \qquad x > A \Rightarrow f(x) > M.$$

1. Application à la fonction $g(x) = x^2$: Compléter la phrase suivante :
   Soit M un réel strictement positif, alors en prenant A=... , pour $x > A$ on a $g(x) > M$. Conclusion ?
2. Exprimer avec les quantificateurs qu'une fonction g ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$

Exercice 2 On considère l'équation différentielle

$$(x-1)(x-2)y' - (2x-3)y = x^2 - 2$$

1. Trouver une solution particulière sous forme d'un polynôme.
2. Déterminer les solutions générales de l'équation homogène sur des intervalles à déterminer.
3. Déterminer une solution continue sur $\mathbb{R}$ telle que $y(0) = 0$.

Exercice 3 Résoudre l'équation différentielle $y' + y \operatorname{th} x = \operatorname{th} x$ avec la condition $y(0) = 2$. Faites l'étude de la fonction solution.

Exercice 4 On considère l'équation différentielle régissant le mouvement d'un pendule amorti

$$y''(t) + 2ay'(t) + y(t) = cos(t)$$

où a est un réel strictement positif.

1. Cherchez une solution particulière de (E) (on pourra prendre une fonction de la forme $A\cos(t) + B\sin(t)$)
2. Résoudre l'équation homogène associée à (E) en fonction de la valeur du paramètre a
3. Dans chacun des cas, donnez la solution de (E) telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Tracer sommairement la forme des solutions. Quelle est leur limite en $+\infty$?

Exercice 5 Soient A, B et C trois ensembles tels que $A \neq \emptyset$. Montrez que $A \times B = A \times C$ si et seulement si $B = C$.

Exercice 6 Soit E un ensemble et A une partie de E.

1. Montrez que, si pour toute partie X de E on a $A \cup X = E$, alors $A = E$.
2. Montrez que, si pour toute partie X de E on a $A \cap X = X$, alors $A = E$.