Université de Provence 2010–2011

Mathématiques Générales 1

Devoir surveillé n° 3

Exercice 1 Combinatoire (5 points) Dans un jeu de 32 cartes, une main est constituée de 5 cartes.

1. Combien y-a-t'il de mains possibles ?
2. Combien de mains contiennent exactement un roi ?
3. Combien de mains contiennent au moins un roi ?
4. Combien de mains contiennent exactement un roi et deux dames ?
5. Combien de mains contiennent l'as de pique et exactement 2 trèfles ?
6. Combien de mains ne contiennent ni roi ni trèfle ? En dduire le nombre de main contenant au moins un roi ou au moins un trèfle.
7. Combien de mains contiennent exactement 1 roi et 2 trèfles ?

Exercice 2 Relation d'équivalence (3 points)

Dans $\mathbb{C}$, on définit la relation R par :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \qquad zRz' \qquad \Longleftrightarrow |z| = |z'|.$$

1. Montrer que c'est une relation d'équivalence.
2. Trouver la classe d'équivalence de z
3. Dessinez trois classes d'équivalence de votre choix.

Exercice 3 Applications (3 points)

1. Étudier la fonction $g(x) = \sin^2(x)$ définie sur $[-\pi, 2\pi]$ et tracer son graphe.
2. Rappelez la définition des ensembles $g([\pi/4, 3\pi/4])$ et $g^{-1}([-1/2, 1/2])$ et les déterminer l'aide du graphe.

Exercice 4 Ensembles (2 points)

Soient X et X' deux ensembles et f une application de X vers X'. Pour tout $A \subset X$, $A' \subset X'$, :

1. montrer que $f^{-1}(A'^c) = f^{-1}(A')^c$.
2. Que peut-on dire de $f(A^c)$ et $f(A)^c$ (dessinez des contres exemples aux deux inclusions) ?

Exercice 5 Applications (6 points)

1. Exprimer avec les quantificateurs qu'une application est injective, surjective, bijective, non injective, non surjective, non bijective.
2. Combien une équation du second degré a-t-elle de solutions dans $\mathbb{C}$?
3. Soit l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z + \frac{1}{z} \end{cases}$$

   f est-elle surjective ? injective ? bijective ? (justifiez)
4. Quelle est l'image par f du complexe $e^{i\theta}$? En déduire l'image par f du cercle de centre 0 et de rayon 1.
5. Soit x un réel, déterminer $f^{-1}(\{x\})$ selon les valeurs de x.

Exercice 6 Relation d'équivalence (5 points)

Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\,R\,y \quad \text{lorsque} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = k\pi.$$

1. Prouver que R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la classe dquivalence $Cl(x_0)$ d'un rel x_0.
3. Soient x_1 et x_2 deux réels distincts appartenant à $Cl(x_0)$, montrer que $|x_1 - x_2| \geq \pi$.
4. En déduire qu'il existe un unique réel y_0 de $Cl(x_0)$ appartenant $[0, \pi[$.
5. Soit la fonction p de $\mathbb{R}$ vers $[0, \pi[$ définie par $p(x_0) = y_0$. Tracer le graphe de p.