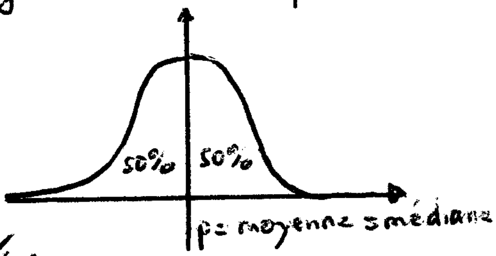
Correction du Devoir Maison n°1

Exercice 1

1°) L'ennoncé nous dit que la médiane vaut 161 cm. Comme une loi Gaussienne est symétrique, sa médiane vaut sa moyenne. On doit prendre $\underline{\mu = 161\,cm}$.



2°) Notons X la variable aléatoire taille d'une fille de 16 ans. On nous dit que $P(X > 165\,cm) = 1/4$.

D'après une table de la loi $N(0,1)$ on a

$$P\left(\frac{X-161}{\sigma} > 0{,}675\right) = 1/4 \quad \text{car} \quad \frac{X-161}{\sigma} \text{ suit une loi } N(0,1).$$

ou encore $P(X > 161 + 0{,}675\sigma) = 1/4$. Et comme on a aussi $P(X > 165) = 1/4$,

on en déduit que $165 = 161 + 0{,}675\sigma$.

Ce qui donne $\underline{\sigma = 5{,}97\,cm}$ et $\underline{\sigma^2 = 35{,}64\,cm^2}$

3°) $X > 170$ équivaut à $\dfrac{X-161}{5{,}97} > \dfrac{170-161}{5{,}97} = 1{,}51$

Comme $\dfrac{X-161}{\sigma}$ suit la loi $N(0,1)$, on trouve dans la table de $N(0,1)$ que

$$P\left(\frac{X-161}{\sigma} > 1{,}51\right) = 6{,}6\%$$

Donc la proportion de filles de 16 ans mesurant plus de $\underline{170\,cm \text{ est de } 6{,}6\%}$

Exercice 2

1°) Notons X la variable aléatoire taille d'une femme adulte.

D'après l'ennoncé $X \sim N(165, 5)$ avec un écart-type $\sigma = 5\,cm$.

Donc aussi $\dfrac{X-165}{5} \sim N(0,1)$.

$$P(X > 170) = P\left(\frac{X-165}{5} > 1\right) = 16\% \text{ d'après la table de } N(0,1).$$

Donc environ 16% des femmes adultes mesurent plus de 170 cm.

2°) a] Le fractile a 0,95 de la loi $N(0,1)$ est d'après la table de $N(0,1)$ égal à 1,64. C'est-à-dire que $P\left(\frac{X-165}{5} > 1{,}64\right) = 5\%$.

comme $165 + 1{,}64 \times 5 = 173{,}2$, on en déduit que $P(X > 173{,}2\text{ cm}) = 5\%$

<u>La taille dépassée par exactement 5% des femmes est 173,2cm</u>

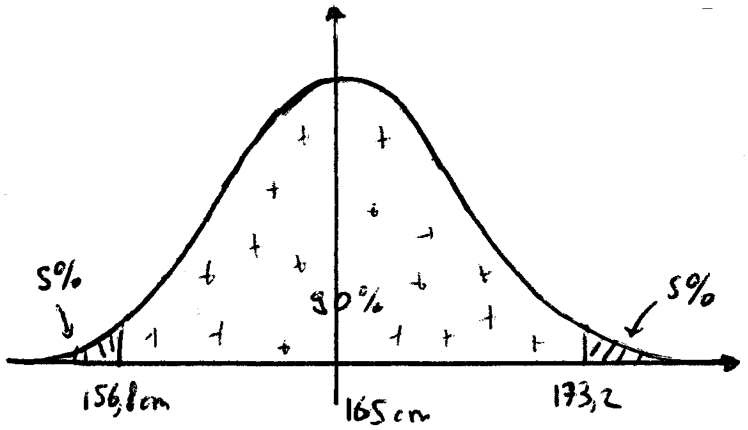
b] La loi $N(0,1)$ étant symétrique, le fractile à 5% est égale à −1,64.

Cela implique que $P\left(\frac{X-165}{5} < -1{,}64\right) = 5\%$. Le calcul $165 - 1{,}64 \times 5 = 156{,}8$ cm

donc <u>5% des femmes mesurent moins de 156,8 cm.</u>

c] D'après a) et b) on peut dire que 90% des femmes adultes ont une taille comprise entre 156,8 et 173,2 cm.

C-à-d que l'<u>intervalle [156,8 ; 173,2]</u> <u>contient la taille de 90% des femmes.</u>



On peut construire une infinité d'autres intervalle contenant la taille de 90% des femmes.

Par exemple. le fractile à 90% de la loi $N(0,1)$ vaut 1,29.

Et comme $165 + 1{,}29 \times 5 = 171{,}4$ cm, l'intervalle <u>]−∞, 171,4] est aussi une solution.</u>

<u>Exercice 3</u>

La question de cet exercice est malheureuse. Comme le résultats des expériences donne une mesure empirique de $97{,}9 < 100$, l'hypothèse $p < 100$ est tout-à-fait acceptable, quel que soit le seuil d'erreur. La valeur la "plus acceptable" serait même $p = 97{,}9$, En effet si on test $p = 97{,}9$ la valeur $\bar{x} = 97{,}9$ fera toujours partie des valeurs raisonnables, et jamais des valeurs extrêmes.

La réponse à la question serait donc <u>oui</u>, on accepte l'hypothèse $p \leq 100$.

Plus intéressante est la question : Peut-on accepter (au seuil de 5%) l'hypothèse d'un QI moyen chez les enfants dislexiques <u>supérieur</u> à 100 ?

Ce test unilatéral est plus intéressant, car il porte sur l'hypothèse la moins probable (entre $\mu \leq 100$ et $\mu \geq 100$).

On pose donc le test (H_0) $\mu \leq 100$ et (H_1) $\mu \geq 100$.

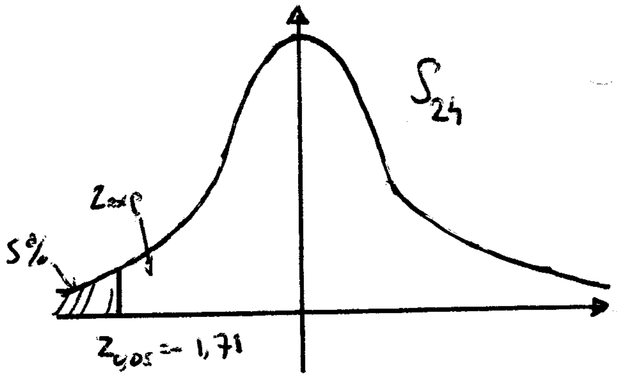
On suppose (H_0). Comme on teste l'hypothèse "opposée" aux données de l'expérience, on se place au seuil et on suppose donc que $\mu = 100$.

Notons X le QI (aléatoire) d'un enfant dislexique de loi $\mathcal{N}(100, \sigma)$ avec σ inconnu.

D'après le cours $Z = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X} - 100}{S'}$ suit la loi S_{24} loi de student à 24 degrés de liberté. (d.d.l).

D'après la table de S_{24}, le fractile à 95% vaut : $z_{0,95} = 1,71$.

Et par symétrie de la loi de student le fractile à 5% vaut $z_{0,05} = -1,71$.



Avec les données de l'expérience, on obtient :

$$z_{exp} = -1,59 \quad \left(= \sqrt{25} \times \frac{97,9 - 100}{6,58} \right)$$

$$z_{exp} > -1,71$$

z_{exp} ne fait donc pas partie des 5% de valeurs extrêmes par le bas. On accepte donc l'hypothèse que $\mu \geq 100$.

Cela veut dire que la différence de QI mesurée n'est pas significative. Elle peut très bien être dûe aux fluctuations observées lors de différentes expériences

Exercice 4 : On teste ici l'égalité (donc test bilatéral) des deux moyennes théoriques, en supposant les écarts-types empiriques égaux.

On utilise les notations suivantes :

- Échantillon des malades $n_1 = 35$ $\overline{X}_1 = 41{,}03$ $s_1' = 8{,}24$
  moyenne théorique μ_1 (à tester) et écart-type théorique σ_1 inconnu.

- échantillon des "sains" : on remplace l'indice 1 par un indice 2.

Par hypothèse $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.

(H_0) $\mu_1 = \mu_2$. avec donc (H_1) $\mu_1 \neq \mu_2$.

On fabrique l'écart-type empirique s' de la réunion des 2 échantillons.

$$s'^2 = \frac{(35-1)\, 8{,}24^2 + (22-1)\, 8{,}88^2}{57-2} = 72{,}08 \quad \text{et donc } \underline{s' = 8{,}49}$$

D'après le cours $Z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{s'\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ suit une loi $\mathcal{S}_{55}$: Student à 55 d.d.l.

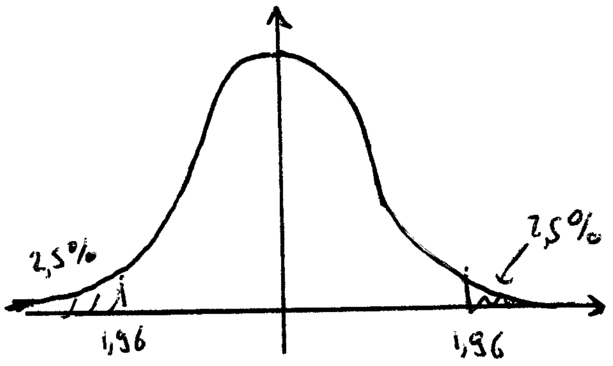
Comme $55 \geq 30$, on approxime la loi $\mathcal{S}_{55}$ par la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Le fractile à 97,5% de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est 1,96 (celui de S_{55} est 2,00)

Avec les données de l'expérience, on trouve

$$Z_{exp} = \frac{41{,}03 - 49{,}04}{8{,}49\sqrt{\frac{1}{35} + \frac{1}{22}}}$$

$$Z_{exp} = -3{,}49$$



Z_{exp} fait partie des 5% de valeurs extrêmes. donc on peut rejeter l'hypothèse que $\mu_1 = \mu_2$

(l'hypothèse d'égalité des écart-type théorique est assez raisonnable, au vu des écart-types empiriques).