Aix-Marseille Université. | **Licence Info 2ème année.**
Probabilités et Statistiques. | **2013-2014**

Examen du mercredi 14 Mai 2014

Durée : 2 heures.
Documents interdits. Calculatrices autorisées.
Téléphones portables interdits.
Les tables nécessaires se trouvent à la fin du sujet.

Le barème est donné a titre indicatif. L'énoncé comporte quatre pages.

Exercice 1 : Questions de cours (2 points).

1. Rappeler la formule des probabilités totales de Bayes.
2. Rappeler la définition de la loi normale centrée réduite.

Exercice 2 : Jeux de dés (8 points).
Le jeu du 421 consiste à obtenir diverses combinaisons (421, trois valeurs identiques, trois valeurs consécutives,...) en lancant simultanément trois dés. On dispose de la possibilité de relancer (jusqu'à deux fois) chaque dé, pour obtenir une des combinaisons gagnantes.
Dans toute la suite, on suppose que les trois dés ne sont pas faussés, et que tous les lancers sont indépendants entre eux.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 4, un 2, et un 1 en lançant simultanément les 3 dés et sans les relancer (donc du premier coup) ?
2. On cherche à obtenir la combinaison "trois 1". Quelle est la probabilité de l'obtenir du premier coup ?
3. De manière plus générale, on note X le nombre de 1 obtenus au premier coup. Quelle est la loi de X ? Calculer les probabilités : $P(X = i)$ pour $i = 0, 1, 2, 3$.
4. On cherche à obtenir la combinaison "trois 1" en deux fois, avec la stratégie suivante : après le premier coup, on relance une fois tous les dés qui n'affichent pas déjà la valeur 1. Calculer la probabilité d'obtenir "trois 1" en deux lancers avec cette stratégie.

On vous propose maintenant le jeu suivant : Vous lancer vos trois dés. Si vous obtenez trois valeurs identiques, vous arrêtez ; sinon vous relancez les trois dés (sans tenir compte de la valeur affichée) et recommencez jusqu'à obtenir trois valeurs identiques. On note N le nombre de fois ou vous devrez jouer avant d'arrêter.

5. Quelle est la probabilité d'obtenir trois valeurs identiques au premier coup ?
6. Quelle est la loi suivie par la variable N ? Donner son espérance.
7. Calculer la probabilité : $P(N > 10)$.

On vous propose le jeu suivant : Vous misez un euro, et jouez au jeu décrit précédemment (lancer trois dés jusqu'à obtenir trois valeurs identiques). Si vous réussissez en moins de 10 lancers (10 inclus), vous gagnez 4 euros. Sinon, vous perdez.

8. Ce jeu vous est-il favorable ? Seriez-vous d'accord pour y jouer 100 fois de suite ?

Exercice 3 : Publicité pour un pizzaiolo (8 points).
Un pizzaiolo décide de reccourir à un service de publicité dans les boîtes aux lettres pour augmenter ses commandes. Il fait donc déposer 5000 tracts dans les boîtes aux lettres du voisinage. Après quelques mois, il estime qu'une personne qui a reçu le tract dans sa boîte aux lettres a environ $0,1\%$ de chances de lui passer une commande un soir donné.
On note X le nombre de personnes qui ont reçu le tract et passent une commande un soir donné. C'est une variable qui dépend de la soirée considérée, et que l'on supposera donc aléatoire.

1. Quelle est la vraie loi de X ? Donner son espérance et sa variance.
2. Quelle approximation peut-on utiliser pour la loi de X ? Donner l'espérance et la variance si on utilise cette approximation.
3. Utiliser l'approximation pour calculer $P(X \leq 3)$.

Le pizzaiolo décide de changer de stratégie commerciale. Il fait distribue un nouveau tract qui contient une offre promotionnelle très alléchante, dans “seulement” 2000 boîtes aux lettres de son voisinage proche. Après un temps d'observations, il estime que 20% des personnes qui ont reçu le tract lui passe une commande pendant une semaine donnée.
On note Y le nombre de personnes qui ont reçu le tract et passent une commande pendant une semaine donnée. C'est une variable qui dépend de la semaine considérée, et que l'on supposera donc aléatoire.

4. Quelle est la vraie loi de Y ? Donner son espérance et sa variance.
5. Quelle approximation peut-on utiliser pour la loi de Y ? Donner l'espérance et la variance si on utilise cette approximation.

Pour l'instant le pizzaiolo commande 440 pâtons surgelés en début de semaine. Il voudrait pouvoir assurer toutes les commandes qu'on lui passe sur une semaine, pour au moins 99% des semaines.

6. En utilisant la loi approchée de Y, calculer la probabilité $P(Y \geq 440)$.
7. D'après vous, le pizzaiolo devrait-il commander plus de pâtons ?
8. Si oui, combien (au moins) devrait-il en commander chaque semaine ?

Exercice 4 : Tests sur une source d'eau (6 points).
Suite à quelques intoxications, le propriétaire d'une source d'eau décide de faire des analyses à différents moments de l'année choisis au hasard. Sur 49 mesures effectuées au total, 13 indiquent une eau non potable, le reste indiquant une eau potable. N'ayant jamais suivi de cours de statistique, il en conclut que l'eau est potable $26,5\%$ du temps.

1. Expliquer pourquoi le propriétaire ne devrait pas donner une valeur exacte.
2. Donner l'intervalle de confiance associé à cet échantillon de mesures.

Il cherche à expliquer ces contaminations sporadiques. Ayant noté en même temps qu'il effectuait ces mesures la présence de cigales ou non à proximité de sa source, il édite le tableau suivant :

Eau \ Cigales	Présentes	Absentes
Non potable	18	12
Potable	5	14

Pour savoir si la potabilité de l'eau est liée à la présence de cigale, il décide de faire un test du χ^2 d'indépendance à partir de ce tableau.
On rapelle que pour faire ce test, la variable *pivot* est

$$Z = \sum_i \sum_j \frac{(N_{i,j}^{obs} - N_{i,j}^{th})^2}{N_{i,j}^{th}},$$

ou les effectifs théoriques se calculent par $N_{i,j}^{th} = \frac{\text{Total ligne}\times\text{Total colonne}}{\text{Total global}}$.

1. Effectuer le test du χ^2 d'indépendance avec un seuil d'erreur de 5%.
2. Le propriétaire en conclut que ce sont les cigales qui polluent sa source. Êtes-vous d'accord avec sa conclusion ?

Table du χ^2

ν	60.0%	66.7%	75.0%	80.0%	87.5%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	99.9%
1	0.708	0.936	1.323	1.642	2.354	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
2	1.833	2.197	2.773	3.219	4.159	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816
3	2.946	3.405	4.108	4.642	5.739	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	4.045	4.579	5.385	5.989	7.214	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467
5	5.132	5.730	6.626	7.289	8.625	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515
6	6.211	6.867	7.841	8.558	9.992	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.458
7	7.283	7.992	9.037	9.803	11.326	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.322
8	8.351	9.107	10.219	11.030	12.636	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.125
9	9.414	10.215	11.389	12.242	13.926	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	10.473	11.317	12.549	13.442	15.198	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
11	11.530	12.414	13.701	14.631	16.457	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264
12	12.584	13.506	14.845	15.812	17.703	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.910
13	13.636	14.595	15.984	16.985	18.939	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.528
14	14.685	15.680	17.117	18.151	20.166	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.123
15	15.733	16.761	18.245	19.311	21.384	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.697
16	16.780	17.840	19.369	20.465	22.595	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252
17	17.824	18.917	20.489	21.615	23.799	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.790
18	18.868	19.991	21.605	22.760	24.997	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312
19	19.910	21.063	22.718	23.900	26.189	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.820
20	20.951	22.133	23.828	25.038	27.376	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.315

ν désigne le nombre de degré de liberté.
Exemple : si Z suit la loi du χ^2 à 6 degrés de libertés, on lit par exemple dans le tableau que $P(Z \leq 9,992) = 87,5\%$.

Tournez la page pour la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Fonction de distribution cumulée de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

On lit dans ce tableau sur la seconde ligne, quatrième colonne : $\mathbb{P}(Z \leq 0,13) = 0,5517$, où Z est une variable de loi normale centrée réduite.