
Feuille de TD 1

1 Dénombrement

Exercice 1 :

1. Quel est le nombre de tiercés dans l'ordre que l'on peut jouer avec 10 chevaux ?
2. Combien peut-on former de comités composés de 3 hommes et 2 femmes choisis parmi 22 hommes et 17 femmes ?

Exercice 2 : On tire 4 cartes d'un jeu de 52 cartes. Construire un espace des issues et calculer les probabilités des événements suivants :

1. la première carte est un 6 ;
2. la deuxième carte est un roi ;
3. la première est un 6 et la deuxième est un roi ;
4. la première est un 6 et la deuxième est un cœur ;
5. la première carte est un 6, la deuxième un roi et la troisième un cœur ;
6. la première carte est un 6, la deuxième un roi, la troisième un cœur et la quatrième un cœur (*dur !*).

Exercice 3 : On lance 5 pièces de monnaie. Donner un espace de probabilité permettant de considérer les événements suivants et calculer leurs probabilités :

- La première pièce donne face ;
- Face sort exactement deux fois ;
- Face sort au plus trois fois.

Exercice 4 : Un couple de chimpanzés décide de faire des enfants jusqu'à ce qu'il ait un mâle, ou jusqu'à ce qu'il ait cinq descendants. La probabilité qu'un singe soit un mâle est de $1/2$.

1. Donner un espace de probabilité modélisant la situation.
2. Calculer les probabilités des événements
 - Le couple de chimpanzé a trois descendants ;
 - Le couple a 5 descendants ;
 - Le couple a un mâle.

Exercice 5 : Une roulette (de casino) a 38 cases, 18 sont noires, 18 sont rouges et 2 sont vertes. On suppose qu'à l'arrêt de la roulette la boule est dans une seule case. Je parie sur rouge, tu paries sur noir.

1. Quelle est la probabilité que je gagne ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un de nous gagne ?
3. Quelle est la probabilité qu'au moins un de nous perde ?

Exercice 6 : *Un problème du Chevalier de Méré (1607-1684)*¹

A-t-on plus de chances d'obtenir au moins une fois un 6 en lançant 4 fois un dé que d'obtenir au moins une fois un double 6 en lançant 24 fois deux dés ?

1. Joueur et mathématicien amateur, connu pour ses problèmes résolus notamment par Blaise Pascal.

Exercice 7 : En admettant que les naissances sont réparties uniformément dans l'année, déterminer la probabilité que parmi n individus deux au moins d'entre eux aient le même jour d'anniversaire.

On négligera le problème des années bissextiles.

2 Probabilités conditionnelles et indépendance.

Exercice 8 : Trois chasseurs tirent simultanément sur 3 canards : chaque chasseur, indépendamment des autres, choisit un canard au hasard et tire dessus (et touche mortellement). Soit N le nombre de canards tués.

1. Donner la loi de N et son espérance.
2. Quelle est la probabilité que le canard 1 soit tué sachant que deux canards sont morts ?

Exercice 9 :

Pendant un concours à la télévision, le présentateur cache un prix (une voiture) derrière une porte (il y a 3 portes : A, B et C). Il invite un concurrent à se présenter et à choisir l'une des trois portes, sans l'ouvrir. Il ouvre ensuite l'une des deux portes qui n'ont pas été choisies par le concurrent, en sachant que la voiture ne se trouve pas derrière ; il offre alors au concurrent la possibilité de choisir de nouveau parmi les deux portes qui restent. Quelle est le meilleur choix pour le concurrent, c'est-à-dire, est-ce que la probabilité de gagner en changeant de porte est plus grande que la probabilité de gagner sans changer de porte ?

Exercice 10 : Un test permet de détecter la grippe aviaire sur les poulets. Cependant, ce test n'est pas parfait car si un poulet n'est pas infecté, le test est positif avec probabilité 0,02 et lorsque le poulet est infecté, le test est négatif avec probabilité 0,01. On sait également que 10% des poulets sont infectés.

1. Sachant que le test est positif sur un poulet, quelle est la probabilité que ce poulet soit infecté ?
2. On considère des poulets **non infectés** par le virus.
 - (a) Pour chaque poulet fixé, quelle est la probabilité p qu'il soit testé positif ?
 - (b) On prélève un échantillon de 10 poulets non infectés. Chaque poulet subit un test qui peut s'avérer être positif ou négatif. Quelle est la probabilité d'obtenir dans notre échantillon 2 poulets testés positifs et 8 poulets testés négatifs ? D'une façon plus générale, donner la loi du nombre de tests positifs.

Exercice 11 : On lance deux dés, un rouge et un bleu, et on note les numéros obtenus. Soit les événements A : "le dé rouge amène un numéro pair", B : "le dé bleu amène un numéro pair", C : "la somme des numéros est paire".

Calculer les probabilités de A, B, C .

Vérifier que A, B, C sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 12 : Soit X_1, X_2 les variables de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Soit $\{Y_i; i = 1, 2\}$ les variables définies par $Y_i = 2X_i - 1$.

1. Est-ce que X_1 et X_1X_2 sont indépendantes ?
2. Est-ce que Y_1 et Y_1Y_2 sont indépendantes ? Le même résultat serait-il vrai si X_1 et X_2 étaient des variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \neq \frac{1}{2}$?