Feuille de TD 2

1 Dénombrement

Exercice 1 : A et B sont des évènements tels que

$$P(A) = 0,6 \quad P(B) = 0,3 \quad \text{et } P(A \cap B) = 0,1.$$

1. Quelle est la probabilité que A ou B arrive ?
2. Quelle est la probabilité qu'exactement un des deux évènements arrive ?
3. Quelle est la probabilité qu'au plus un des deux évènements arrive ?
4. Quelle est la probabilité que ni A ni B n'arrivent ?

Exercice 2 : Sur $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$, déterminer la loi de probabilité P telle que $P(i)$ soit proportionnel à i pour tout élément i de Ω.
Calculer la probabilité pour qu'un élément de Ω soit pair puis la probabilité pour qu'il soit impair.

2 Variables aléatoires et indépendance

Exercice 3 : Soit X une variable géométrique de paramètre p.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$.
2. Montrer que X est sans mémoire i.e.

$$\forall k, l \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > k + l | X > l) = \mathbb{P}(X > k) \, .$$

Exercice 4 :
Soit X une variable aléatoire positive à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que son espérance peut s'écrire de la façon suivante :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k) \, .$$

Utiliser ce résultat pour calculer l'espérance d'une variable aléatoire X, qui suit une loi géométrique de paramètre p.

Exercice 5 : Loi Binomiale négative.
Donnons-nous un nombre n. On répète la même expérience à deux issues (e.g. jeu de pile ou face) jusqu'à obtenir n succès. Les expériences sont supposées identiques et indépendantes et on note p la probabilité d'obtenir un succès lors d'une expérience. Notons alors N le nombre d'expériences effectuées jusqu'au n-ième succès. On dira que N suit une loi binomiale négative de paramètres n et p.
Explicitez la loi de N. Puis calculer son espérance.

Exercice 6 : Loi hypergéométrique.
On dispose d'une urne contenant N boules : K boules blanches et $N - K$ boules noires. On tire sans remise n boules dans l'urne où $n \leqslant \min(K, N - K)$, et on note X le nombre de boules blanches dans le tirage. On dira que X suit une loi hypergéométrique de paramètres n, $p = \frac{K}{N}$, et N.

1. Explicitez la loi de X.
2. Montrez que $\forall k \in \mathbb{N}, 1 \leqslant k \leqslant K$, on a $kC_K^k = KC_{K-1}^{k-1}$.
3. Démontrez l'identité de Vandermonde : $C_{m+n}^r = \sum_{k=0}^{r} C_n^k C_m^{r-k}$.
4. En déduire la relation : $\sum_{k=0}^n kC_K^k C_{N-K}^{n-k} = KC_{N-1}^{n-1}$.
5. Calculez l'espérance de X.

Exercice 7 : Deux urnes U_1 et U_2 contiennent chacune initialement 4 boules blanches et 6 boules noires. On tire au hasard une boule dans U_1 et sans la regarder on la place dans U_2, puis on tire au hasard une boule dans U_2. Quelle est la probabilité d'obtenir alors une boule blanche lors du tirage dans U_2 ? (suggestion : on calculera la probabilité d'obtenir alors une boule blanche sachant que la première boule est blanche, puis sachant que la première boule est noire).

Exercice 8 : On dispose de deux urnes. L'urne U contient une boule blanche et quatre boules noires ; l'urne V contient trois boules blanches et deux boules noires. Dans l'une des urnes choisie au hasard, on effectue une série de tirages d'une boule avec remise (tous les tirages ont lieu dans la même urne). Soit A_i l'évènement "la i-ème boule tirée est blanche".

1. Calculer $P(A_1)$, $P(A_2)$. A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?
2. Calculer $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Sachant que les $(n-1)$ premiers tirages donnent chacun une boule blanche, quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au n-ième tirage ?
4. Sachant que les n premières boules tirées sont blanches, quelle est la probabilité d'avoir tiré dans U ?

Exercice 9 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, Y de loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la variable $X + Y$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n + m, p)$.

Exercice 10 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi de Poisson de paramètre λ et Y une loi de Poisson de paramètre μ. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 11 : Soient X et Y deux v. a. indépendantes, X de loi géométrique de paramètre p, Y de loi géométrique de paramètre q, avec $0 < p, q < 1$.
Rappel : $\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k, k \in \mathbb{N}$.

1. On pose $U = \min(X, Y)$. Calculer $\mathbb{P}(U > k)$. Préciser la loi de la v.a. U.
2. On considère maintenant le couple $U = \min(X, Y)$, $V = X - Y$. Calculer $\mathbb{P}(U = k, V = l)$, pour $k \geqslant 1$ et $l \in \mathbb{Z}$ (on distinguera les cas $l \geqslant 0$ et $l < 0$).
3. En déduire les lois des v.a. U et V (sans utiliser la question 1), et que U et V sont indépendantes. Calculer $\mathbb{P}(V \geqslant 0)$.