
Feuille de TD n° 3 : Variables aléatoires.

Variables aléatoires discrètes.

Exercice 1 :

Un fabricant d'ordinateurs importe respectivement 30, 25 et 45% de ses claviers de trois pays A, B et C . Selon la provenance, les probabilités respectives qu'un clavier soit défectueux sont $q_A = 0,05$, $q_B = 0,08$ et $q_C = 0,09$.

1. Déterminer la probabilité qu'un clavier importé soit défectueux.
2. Dans un lot (tous les claviers d'un lot proviennent du même pays), on extrait deux claviers. Le premier ne fonctionne pas. Quelle est la probabilité que le second ne fonctionne pas non plus ?

Exercice 2 : Hughette a décidé de parcourir 150000 kilomètres en vacances cet été avec sa voiture, une Fiat Epavo. Mais elle apprend que la probabilité d'avoir un accident sur un kilomètre est de $1/150000$. Elle pense alors être sûre d'avoir un accident et décide d'annuler son voyage.

1. Êtes vous d'accord avec Hughette ? Dans tous les cas, il faudra justifier la réponse.
2. Donner grâce à un vrai calcul, la probabilité qu'Hughette ait un accident durant son voyage.

Exercice 3 : Les bits (0 ou 1) transmis par une longue fibre optique peuvent éventuellement être modifié durant le trajet (un 0 devenir un 1 et réciproquement), avec une probabilité de 20%. L'opérateur de la ligne trouve ce taux d'erreur trop élevé et décide de tripler tous les bits : il va transmettre 000 pour 0 et 111 pour 1. A l'arrivée, le récepteur décode le signal avec la règle de la majorité : si parmi les trois bits, il y a plus de 0, le récepteur considère que c'est un 0, et ce sera un 1 dans le cas contraire.

1. Calculer la nouvelle probabilité d'erreur.
2. L'opérateur n'est toujours pas satisfait. Il souhaiterait un taux d'erreur inférieur à 5%. Combien de fois doit-il dupliquer chaque bit pour satisfaire cette exigence ?

Exercice 4 : Des études effectuées par les compagnie aériennes montre que chaque passager réservant un vol a une probabilité de 5% de ne pas prendre son avion. De ce fait, Antartic Airlines vend toujours 94 billets pour ses avions de 90 sièges, et Aerolineas Atlantidas vend toujours 188 billets pour ses gros porteurs de 180 places.

1. Avec quelle compagnie le risque qu'au moins un passager ne puisse pas monter dans l'avion est-il le plus grand ?

Quand il manque de place, la compagnie choisit aléatoirement le passager qui ne pourra pas monter.

2. Calculer la probabilité pour un passager de ne pas pouvoir monter dans l'avion (pour chacune des deux compagnies).

Exercice 5 : À l'université, le taux de blocage de mâchoire provoqué par un bâillement profond est de une personne pour mille par mois. On suppose qu'un-e étudiant-e a au plus un blocage de mâchoire par mois, et que ces blocages sont indépendants. L'université compte 4000 étudiant-es, et on y enseigne 8 mois dans l'année.

1. Quelle est la probabilité qu'en un mois, il y ai au moins 3 blocages de mâchoires parmi les étudiant-es ?
2. Quelle est la probabilité qu'au cours d'une année universitaire (de 8 mois), le nombre de mois avec au moins 3 blocages de mâchoire soit supérieur ou égal à 4 ?
3. On numérote les huit mois de l'année universitaire de 1 à 8. Pour tout $i \leq 8$, quelle est la probabilité pour que le premier mois avec au moins trois blocages de mâchoires soit le mois i ?

Variabes aléatoires continues.

Exercice 6 : Soit une variable aléatoire de loi exponentielle, de paramètre λ . On rappelle que cela veut dire que la densité f de X est donnée par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ pour } x \geq 0, \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

1. Calculer la fonction de répartition F
2. Pour α entre 0 et 1, que vaut le α -quantile (ou α -fractile) $q = F^{-1}(\alpha)$? On donnera en particulier le quantile à 50%.

Un atome radioactif d'uranium 238 se transforme en Uranium 235 après un temps aléatoire T , qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . On sait qu'il a une chance sur deux de se transformer avant 4,47 milliards d'années.

3. En déduire la valeur de λ .
4. On dispose de 1000000 d'atomes d'Uranium 238. Au bout de combien de temps peut-on dire que 95% des atomes se seront transformés ?

Exercice 7 : Tous les jours, Amina parcourt le même trajet de 5km en vélo pour se rendre à son travail. Sa vitesse dépend des conditions météorologiques et de la circulation. Sur une année (ou plus), on peut considérer que c'est une variable aléatoire, dont la densité est donnée par :

$$f_V(v) = \begin{cases} C v e^{-\lambda v}, & \text{pour } v \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Exprimer C en fonction de λ .
2. Amina roule à une moyenne de 17km.h⁻¹. Déterminer les valeurs de C et de λ .
3. La durée du voyage est donc une V.A. $T = \frac{5}{V}$. Déterminer la densité, puis l'espérance de T .

Exercice 8 : Soient $\lambda > 0$ et U une v.a. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$. Quelle est la loi de $-\ln U/\lambda$?

Exercice 9 : Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$ une fonction strictement croissante d'image l'intervalle $]0, 1[$ tout entier. On note $F^{-1} :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, sa fonction inverse. Soit U une v.a. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$. Quelle est la loi de $F^{-1}(U)$? Soit maintenant f une densité de probabilité sur \mathbb{R} , telle que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une v.a. de densité f .

Exercice 10 : À tout réel $x \geq 0$ on associe l'entier $\lceil x \rceil := \inf\{k \in \mathbb{N} : x \leq k\}$. Par exemple $\lceil 3,1 \rceil = 4$, $\lceil 0,56 \rceil = 1$... Soit X une v.a. de loi $\mathcal{E}(1)$. Quelle est la loi de $\lceil X \rceil$?

Exercice 11 : Soient X et Y deux v.a. indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\mu)$. Quelle est la loi de $\min(X, Y)$?

Exercice 12 : Soient U_1, \dots, U_n , des v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Quelles sont les lois de $X = \min(U_1, \dots, U_n)$ et $Y = \max(U_1, \dots, U_n)$?
2. En déduire leur espérance et variance.

Exercice 13 : Soit X une v.a. de densité $f(t) = a e^{-2|t|}$.

1. Que vaut la constante a ?
2. Représenter la courbe de f
3. Quelle est la densité de $Y = X^2$?
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(Y)$.

Exercice 14 : Soient a et λ deux réels strictement positifs, et f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$f_\lambda(x) = axe^{-\lambda x}, \text{ si } x \geq 0, \quad \text{et } 0, \text{ sinon.}$$

- 1) Quelle relation doivent vérifier a et λ pour que f_λ soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X ?
- 2) On suppose cette relation vérifiée. Calculer l'espérance et la variance de X en fonction de λ .
- 3) Calculer pour tout $t \geq 0$, l'intégrale $\int_t^\infty f_\lambda(s) ds$.
- 4) La durée de vie, en années, d'un appareil électroménager est une variable aléatoire de densité f_λ avec $\lambda = 1$.
 - a) Quelle est la probabilité pour que l'appareil dure plus de 1 an, 3 ans et 5 ans ?
 - b) Quelle est la probabilité pour que l'appareil dure plus de 5 ans, sachant qu'il fonctionnait encore après un an ?

Exercice 15 : Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, et notons F la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Exprimer en fonction de $F(x)$, avec $x \geq 0$, les quantités suivantes : $P(|X - \mu| \leq 1.5)$ et $P(X > 2)$.

Exercice 16 : Un radar se trouve sur une route où la vitesse est limitée à 90km/h. Après une certaine période d'utilisation, on se rend compte que les vitesses des automobilistes sont pratiquement distribuées selon une loi normale, de moyenne 84km/h, et d'écart-type 8km/h. Le radar est réglé pour flasher les conducteurs roulant à plus de 92km/h.

1. Quelle est la proportion de conducteurs qui seront flashés pour excès de vitesse ?
2. Un excès de vitesse de plus de 30km/h entraîne un retrait de permis. Parmi les conducteurs qui auront une amende, combien vont se faire retirer leur permis ?

Exercice 17 : Une V.A. X suit la loi de Cauchy, donnée par la densité suivante

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On pose $Z = X^{-1}$. Calculer la densité associée à Z . Que remarquez-vous ?

Exercice 18 : Un vendeur de journaux achète ses journaux 70 centimes et les revend 1 euros. Mais il ne peut se faire rembourser les invendus. On suppose que la demande journalière est une V.A. X de loi normale de moyenne 100 et écart-type 8.

1. Si s est le nombre de journaux qu'il achète, donner l'espérance de son bénéfice en fonction de s et de F_X , la fonction de répartition de X .
2. Combien de journaux doit-il acheter pour maximiser son bénéfice ?

Fonction de distribution cumulée de la loi normale.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

On lit dans ce tableau sur la seconde ligne, quatrième colonne : $\mathbb{P}(Z \leq 0,13) = 0,5517$, ou Z est une variable de loi normale centrée réduite.