Université Paris VII
L3 Maths – Option Maths Appliquées
M7301 - Travaux Dirigés

Rappels d'algèbre linéaire (1)

Exercice 1
On considère un système d'équations linéaires à coefficients réels homogène à 3 équations et 5 inconnues. Quelle peut être la dimension de l'espace des solutions ? Justifier.

Exercice 2
Calculer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ d'équation

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = 0 \\ \vdots & + & \cdots & + & \vdots & = 0 \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = 0 \end{array}\right.$$

en fonction du rang r de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3
Soit $E \subseteq \mathbb{R}^4$ le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer la dimension de E.

Exercice 4
Soit E et F deux espaces vectoriels et $l \in \mathcal{L}(E, F)$.
1) Montrer que
l bijective $\iff \exists!\ l^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $\left\{\begin{array}{l} l(l^{-1}(y)) = y\ \forall y \in F, \\ l^{-1}(l(x)) = x\ \forall x \in E. \end{array}\right.$
2) On suppose que E et F ont la même dimension. Montrer que
l bijective $\iff$ l injective $\iff$ l surjective $\iff$ $\operatorname{Ker} l = \{0\}$ $\iff$ $\operatorname{Im} l = F$.

Exercice 5
Soient A et B deux matrices carrées de taille n telles que $AB = Id$ où Id représente la matrice identité. Montrer que A et B sont inversibles et que $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.

Exercice 6
1) Prouver que $u_1 = (0, 1, 2)$, $u_2 = (1, 3, 5)$ et $u_3 = (5, 4, 6)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer les

coordonnées de $u = (7, 4, 7)$ dans cette base.
2) On considère l'application linéaire

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) \longmapsto (x', y', z', t') \end{array}$$

où $x' = x + 2y + 7z + 4t$, $y' = x - y + z + t$, $z' = -x + y - z - t$, et $t' = x + 3z + 2t$. Déterminer une base de Ker f et une base de Im f.
3) Pour chacune des matrices R et S, calculer son inverse ou montrer qu'elle n'est pas inversible.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7
Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

une matrice vérifiant :
$|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ (matrice à diagonale strictement dominante).
Montrer que A est inversible.

Exercice 8
Dire dans quel cas la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible.

Exercice 9
Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\begin{array}{l} f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, \\ f(e_2) = e_2 + 5e_3, \\ f(e_3) = 2e_3. \end{array}$$

Montrer que f est inversible et calculer $f^{-1}(e_1)$, $f^{-1}(e_2)$ et $f^{-1}(e_3)$ en fonction de e_1, e_2 et e_3.

Exercice 10
On note :

$$\mathbb{U} = \{U \in GL(n, \mathbb{C}) \text{ t. q. } U \text{ est triangulaire supérieure } \}$$

et

$$\mathbb{L} = \{L \in GL(n, \mathbb{C}) \text{ t. q. } L \text{ est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale}\}.$$

1) Montrer que $\mathbb{U}$ est formé des matrices U qui stabilisent chacun des sous-espaces vectoriels E_k de $\mathbb{C}^n$ engendré par les k premiers vecteurs de la base canonique. En déduire que si $U, V \in \mathbb{U}$, $UV \in \mathbb{U}$ et $U^{-1} \in \mathbb{U}$.
2) Montrer que si $L, M \in \mathbb{L}$, $LM \in \mathbb{L}$ et $L^{-1} \in \mathbb{L}$.