Université Paris VII
L3 Maths – Option Maths Appliquées
M7301 - Travaux Dirigés

Rappels d'algèbre linéaire (2)

Exercice 1
1) En utilisant la définition suivante du déterminant

$$det(A) = \Sigma_{\sigma \in \mathcal{S}_n} s(\sigma) \Pi_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)},$$

montrer que pour toute matrice triangulaire supérieure $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $det(A) = \Pi_{i=1}^n a_{ii}$ (les a_{ii} représentent les éléments diagonaux de A).
2) Plus généralement (et en utilisant la même définition du déterminant) montrer que pour toute matrice triangulaire supérieure par blocs $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $detA = \Pi_{i=1}^r det(A_{ii})$ (les A_{ii} pour $i = 1, ..., r$ représentent les r blocs diagonaux de A).
3) Application : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice qui se décompose par blocs en

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

où A_{11} est une matrice carrée inversible. Montrer que

$$\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}).$$

Indication : utiliser l'égalité

$$A = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ A_{21} A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \end{pmatrix}$$

où I_1 et I_2 sont les matrices *identité* de même dimension que A_{11} et A_{22}.

Exercice 2
On note A la matrice du système linéaire suivant d'inconnue $(u_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$.

$$4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} = 0, \quad 1 \le i, j \le n$$

avec la convention :

$$u_{i,0} = u_{i,n+1} = u_{0,j} = u_{n+1,j} = 0$$

quand $0 \le i, j \le n+1$.
1) Exprimer la matrice A sous forme d'une matrice par blocs carrés d'ordre n.
Indication : on regroupera les inconnues $(u_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ sous la forme d'un vecteur

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}, \quad \text{avec pour tout } j = 1, ..., n : \quad U_j = \begin{pmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{nj} \end{pmatrix}.$$

2) La matrice A précisée dans la question précédente est-elle à diagonale strictement dominante ?
3) Montrer que la matrice A est symétrique définie positive et donc inversible.
Indication : si $t_0 = t_{n+1} = 0$ et $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{n}(2t_k - t_{k-1} - t_{k+1})t_k = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})^2 + t_n^2$ (identité que l'on montrera).

Exercice 3
1) Montrer qu'une matrice hermitienne

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

est définie positive si et seulement si les matrices extraites

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix} \quad \forall k \in \{1, ..., n\},$$

le sont.
2) Soit A une matrice symétrique réelle telle que les mineurs principaux sont strictement positifs, *i.e.*

$$det(A^i) > 0 \quad \forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \text{avec} \quad A^i := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i} \end{pmatrix}.$$

Pour $j \leq i$, on note $A^i_{j,i}$ la matrice obtenue à partir de la matrice A^i en enlevant la j-ième ligne et la i-ième colonne. Pour $i = 1, ..., n$, on pose

$$f_i = \frac{1}{det(A^i_{i,i})} \sum_{j=1}^{i} (-1)^{i+j} det(A^i_{j,i}) e_j$$

où les (e_i) sont les éléments de la base canonique. On veut montrer que la famille (f_i) est A-orthogonale, *i.e.*

$$(Af_i, f_j) = 0, \forall\ i \neq j.$$

a) Remarquer que la i-ième composante de f_i est 1 et que les suivantes sont nulles.
b) Montrer que la i-ième composante de Af_i est $det(A^i)/det(A^i_{i,i}) = det(A^i)/det(A^{i-1})$ et que les précédentes sont nulles.
c) En déduire que la famille (f_i) est A-orthogonale.
d) En déduire une famille (g_i) qui est A-orthonormée.
3) En utilisant les questions précédentes, montrer qu'une matrice symétrique réelle

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

est définie positive si et seulement si les mineurs principaux sont strictement positifs.
4) En déduire qu'une matrice symétrique réelle suffisamment proche d'une matrice symétrique définie positive est elle-même définie positive.
Indication : utiliser la continuité de l'application qui à une matrice carrée associe son déterminant.

Exercice 4
Le produit de deux matrices symétriques définies positives de même dimension et l'inverse d'une

matrice symétrique définie positive sont-ils toujours des matrices symétriques définies positives ?

Exercice 5
Pour tout $n \geq 1$, on note

$$H_n = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

(matrice de Hilbert d'ordre n).
1) Montrer que la matrice symétrique H_n est définie positive.
Indication : remarquer que

$$\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i-1} t^{j-1} \, dt, \quad 1 \leq i,j \leq n.$$